به نام حق

حل سوالات درس ریاضی مهندسی

آزمون ارشد ۱۴۰۴ برق

۳۱- فرض کنید سری فوریه تابع $y = f(x)$ در فاصلهٔ $[-\pi, \pi]$ بـه صـورت $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ باشد. اگر f و f′ پیوسته و $f(\pi) = f(-\pi)$، آنگاه ضریب فوریه سینوسی تابع $y = f'(x)$ در بازهٔ $[0, \pi]$، کدام است؟

۱) $\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(f(x) + f(-x))\sin(nx)\,dx$

۲) $\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(f(x) - f(-x))\sin(nx)\,dx$

۳) $\frac{n}{\pi}\int_0^{\pi}(f(x) - f(-x))\cos(nx)\,dx$

۴) $\frac{-n}{\pi}\int_0^{\pi}(f(x) + f(-x))\cos(nx)\,dx$ ✓

با اسمه الرحمن

حل سؤالات درس ریاضی مهندسی

ارشد برق ۴۰۴

الیاس حاج محمدی @memories1397

فرض کنیم b'_m معرف ضرایب سری فوریه سینوسی $f'(x)$ باشد. لذا

$$b'_m = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f'(x)\,\mathrm{Sin}\,mx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\Big(\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} n\big(b_n \mathrm{Cos}\,nx - a_n \mathrm{Sin}\,nx\big)}\Big)\mathrm{Sin}\,mx\,dx$$

از طرفین رابطه فرض، مشتق گرفتیم.

$$\Rightarrow \quad b'_m = 2/\pi \sum_{n=1}^{\infty} n\left\{\int_0^{\pi} b_n \mathrm{Cos}\,nx\,\mathrm{Sin}\,mx\,dx - \int_0^{\pi} a_n \mathrm{Sin}\,nx\,\mathrm{Sin}\,mx\,dx\right\}$$

طبق قضیه تعامد، انتگرال اول همواره صفر است.

انتگرال دوم نیز فقط برای $n=m$ غیر صفر است. لذا

$$b'_m = -\frac{2m}{\pi} a_m \underbrace{\int_0^{\pi} \mathrm{Sin}^2 mx\,dx}_{\pi/2} = -m a_m$$

از طرفی $a_m = 1/\pi \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{Cos}\,mx\,dx$. لذا

$$b'_m = -\frac{m}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx = -\frac{m}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos mx\,dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx\right\}$$

انتگرال اول را با تغییر متغیر $x=-u$ ، بازنویسی می‌کنیم. که می‌شود ←

$$-\int_{\pi}^{0} f(-u)\cos(-mu)\,du = \int_{0}^{\pi} f(-u)\cos mu\,du = \int_{0}^{\pi} f(-x)\cos mx\,dx$$

در نهایت داریم ←

$$b'_m = \underbrace{-\frac{m}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(f(x)+f(-x)\right)\cos mx\,dx}_{\text{گزینه ۴ درست است.}}$$

۳- جواب عمومی معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی $\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial x}=۲(x+y)\,u$ ، به روش ضربی (تفکیـــک متغیرهـا) کدام است؟

۱) $u=C\,e^{x^{۲}+y^{۲}+k(x+y)}$

۲) $u=C\,e^{x^{۲}+y^{۲}+k(x-y)}$

۳) $u=C\,e^{x^{۲}-y^{۲}+k(x-y)}$

۴) $u=C\,e^{x^{۲}-y^{۲}+k(x+y)}$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=2(x+y)u \xrightarrow{u=F(x)G(y)} F'(x)G(y)+F(x)G'(y)=2(x+y)F(x)G(y)$$

$$\xrightarrow{\div F(x)G(y)} \frac{F'(x)}{F(x)}+\frac{G'(y)}{G(y)}=2x+2y \xrightarrow{\text{باید}} \begin{cases} \dfrac{F'(x)}{F(x)}=2x+C_1 & (i) \\ \dfrac{G'(y)}{G(y)}=2y-C_1 & (ii) \end{cases}$$

$$\frac{\frac{dF(x)}{dx}}{F(x)}=2x+C_1 \Rightarrow \frac{dF(x)}{F(x)}=(2x+C_1)dx \xrightarrow{\int}$$ ← حل (i)

$$\ln F(x)=x^2+C_1x \Rightarrow F(x)=e^{x^2+C_1x}$$

$$G(y)=e^{y^2-C_1y}$$ ← به همین صورت معادله (ii) حل می‌شود

$$u(x,y)=G(y)F(x)=\underbrace{e^{x^2+y^2+C_1(x-y)}}_{\text{گزینه ۲ صحیح است.}}$$ ← در نهایت

۳۴- در حل معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی $u_t + ۴u_x - ۹u_{xx} = ۰$ از تغییر متغیر $u(x,t) = v(x,t)\, w(x)$ چنان استفاده می‌کنیم که پس از جایگذاری آن در معادله دیفرانسیل، ضریب v_x صفر شود. صورت جدید معادله دیفرانسیل، کدام است؟

۱) $v_t - ۹v_{xx} = ۰$

۲) $۹v_t - ۸۱v_{xx} + ۴v = ۰$

۳) $v_t - ۹v_{xx} + ۴v = ۰$

۴) $۹v_t - ۹v_{xx} + ۴v_x = ۰$

$$u_t + 4u_x - 9u_{xx} = 0 \quad , \quad \underbrace{u(x,t) = v(x,t)\,W(x)}_{(I)}$$

قرار دادن (I) در معادله ←

$$\dot v(x,t)W(x) + 4v'(x,t)W(x) + 4v(x,t)W'(x) - 9\frac{d}{dx}(v'W + vW') = 0 \Rightarrow \dot vW + 4v'W + 4vW' - 9v''W - 9v'W' - 9v'W' - 9vW'' = 0$$

$$\Rightarrow \dot vW + v'(4W - 18W') + v(4W' - 9W'') - 9Wv'' = 0$$

می‌خواهیم $4W - 18W' = 0$ ⇐ پس $4W = 18W'$ و با مشتق‌گیری از طرفین

$4W' = 18W''$. بنابراین معادله به اینصورت می‌شود ⇐

$$W\dot v + v(4W' - 2W') - 9Wv'' = 0 \xrightarrow{2W' = \frac{4}{9}W}$$

$$W\dot v + \frac{4}{9}Wv - 9Wv'' = 0 \xrightarrow{\times 9}$$

$$9\dot v + 4v - 81v'' = 0$$ (گزینه ۲ درست است)

۳۴- تصویر نقاط واقع بر منحنی $|z+1|=2$، تحت نگاشت $u+iv=\frac{z-1}{z-2}$، کدام است؟

۱) خط موازی با محور v

۲) خطی که از مبدأ مختصات می‌گذرد.

۳) دایره‌ای که از مبدأ مختصات نمی‌گذرد.

۴) دایره‌ای که از مبدأ مختصات می‌گذرد.

۳۴ـ می توان نوشت ←

$$f(z)=\frac{z-1}{z-2}=\frac{z-2+1}{z-2}=1+\frac{1}{z-2}$$

لذا ابتدا نگاشت دایره $|z+1|=3$ را تحت تبدیل $f_1(z)=z-2$ بدست می آوریم.

می شود ← $|z+3|=3$.

$$|z+3|=3 \Rightarrow (x+3)^2+y^2=9 \Rightarrow x^2+y^2+6x=0$$

حال نگاشت منحنی حاصل را تحت $f_2(z)=\frac{1}{z}$ می یابیم.

یادآوری ← نگاشت منحنی $A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0$ تحت تبدیل $u+iv=w=1/z$ بصورت $\underbrace{D(u^2+v^2)+Bu-Cv+A=0}$ می باشد. لذا نگاشت منحنی مذکور برابر ← $\underbrace{\text{تحت } f_2(z)}$

$$6u+1=0 \Rightarrow u=-1/6$$

می شود. درنهایت، نگاشت منحنی حاصل تحت تبدیل $f_3(z)=1+f_2$ برابر $u=5/6$ می شود. که خطی موازی محور y است (گزینه ۱)

۳۵- مقدار $\oint_{|z|=۴} \frac{z^{۹۰}\, dz}{(z^{۴}+۴)^{۱۰}(z^{۲}+۲)^{۲۶}}$ ، کدام است؟

۱) ۱

۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) صفر

۴) ۱-

؟

۳۵ـ ۴ شاید بتوان اینگونه استدلال کرد که چون قطب های تابع f که

برابر $\sqrt{2}e^{i\pi/2}$ و $\sqrt{2}e^{-i\pi/2}$ | $\sqrt{2}e^{i\pi/4}$ و $\sqrt{2}e^{-i\pi/4}$ | $\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ و $\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$

هستند f دو به دو نسبت به محور x متقارن اند، از طرفی صورت تابع،

توان زوجی از z است، لذا مانده تابع در این نقاط، دو به دو یکدیگر

را خنثی می کنند. لذا جواب نهایی صفر است.

شماره کارت زیر، متعلق به موسسه محک است.

که هدف آن، درمان و مراقبت از کودکان سرطانی است:

۶۰۳۷ ۷۰۷۰ ۱۱۰۰ ۸۳۲۷