به نام خدا

حل سوالات درس الکترومغناطیس

آزمون ارشد برق ۴۰۴

@ElecMagn_EEng @elec_magnet

الکترومغناطیس:

۱۰۶- به‌ازای کدام تابع، میدان $\bar{E} = ye^{-x}\sin x\,\hat{a}_x + f(x)\hat{a}_y$ شرایط میدان الکتریکی ساکن را دارا است؟

۱) $f(x) = \frac{۱}{۲}e^{-x}(\sin x + \cos x)$

۲) $f(x) = \frac{۱}{۲}e^{-x}(\cos x - \sin x)$

۳) $f(x) = -\frac{۱}{۲}e^{-x}(\sin x + \cos x)$ ✓

۴) $= \frac{۱}{۲}e^{-x}(\sin x - \cos x)$

یا ارحم الراحمین

حل سؤالات درس الکترومغناطیس

آنتون ارشد برق ۹۴

الیاس حاج محمدی @memories

1397

۱۰۶ـ در حالت الکترواستاتیک $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$. کدام

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ ye^{-x}\sin x & f(x) & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \hat{a}_z \left\{ \frac{\partial f(x)}{\partial x} - \frac{\partial (ye^{-x}\sin x)}{\partial y} \right\} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{df(x)}{dx} = e^{-x}\sin x \Rightarrow df(x) = e^{-x}\sin x\, dx \xrightarrow{\int}$$

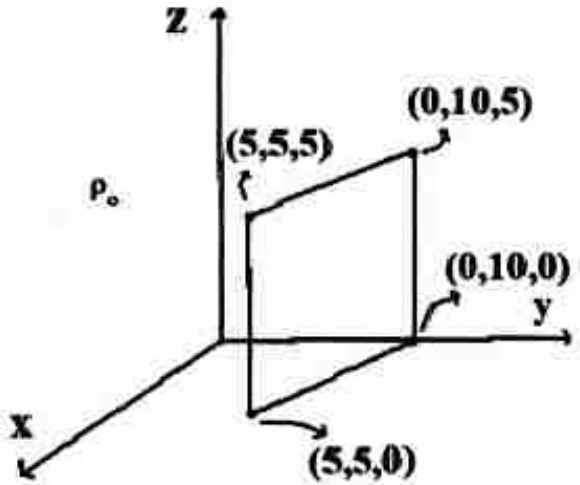
(توجه کنید چون $f(x)$ تک متغیره است کلا $\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{df(x)}{dx}$)

$$f(x) = \int e^{-x}\sin x\, dx + C_1 = \left(-\frac{1}{2}e^{-x}\{\sin x + \cos x\} + C\right)$$

(برای تسریع کار، طبق گزینه‌ها می‌توانید بررسی کنید که کدام یک، مشتق آن $e^{-x}\sin x$ می‌شود. یا از روش جزء به جزء استفاده کنید.)

بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

۱۰۷- یک صفحه بی‌نهایت با چگالی بار سطحی $\rho_s = \rho_0$ در صفحه xz قرار دارد. شار الکتریکی گذرنده از صفحه مستطیلی نمایش‌داده‌شده در شکل زیر، چه ضریبی از ρ_0 است؟



۱) ۵۰

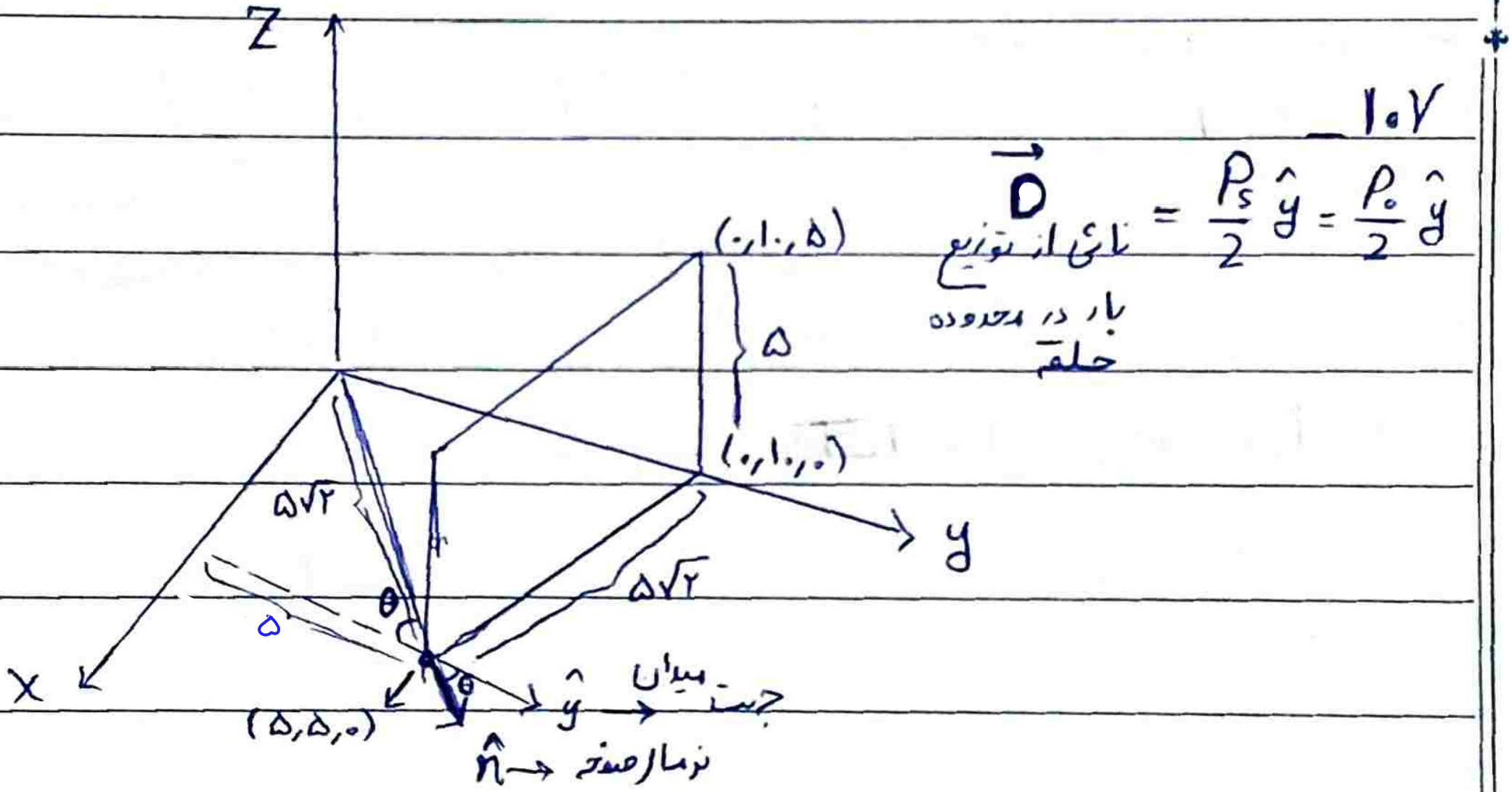
۲) ۲۵

۳) $\frac{۷۵}{۲}$

۴) $\frac{۲۵}{۲}$

$\vec{D} = \frac{P_s}{2}\hat{y} = \frac{P_0}{2}\hat{y}$

ناشی از توزیع بار در محدوده حلقه

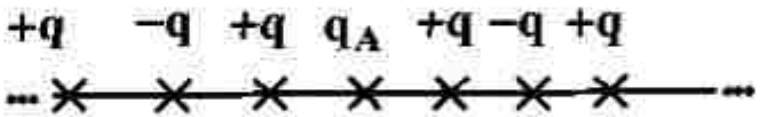


$$\phi = \int_{\text{سطح حلقه}} \vec{D}.d\vec{s} \xrightarrow{\text{میدان یکنواخت}} = DS\cos\theta = \frac{P_0}{2}(5)(5\sqrt{2})\left(\frac{5}{5\sqrt{2}}\right)$$

$$\Rightarrow \phi = \frac{25}{2}P_0$$ (گزینه ۴ صحیح است)

RAZ

۱۰۸- در شکل زیر، زنجیره‌ای از بارهای $+q$ و $-q$ بر روی یک خط راست، تا بی‌نهایت قرار دارند. فاصله بین دو بار متوالی، a است. کار لازم برای دور کردن بار q_A از زنجیر و بردن آن به‌بی‌نهایت برحسب $\frac{q_A q}{\pi\varepsilon_0 a}$، کدام است؟



(راهنمایی: $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$)

۱) $\frac{\ln 2}{2}$

۲) $-\frac{\ln 2}{2}$ ✓

۳) $\frac{\ln 2}{4}$

۴) $-\frac{\ln 2}{4}$

از چپ به راست بخوانید

۱۰۸-

کار لازم = انرژی تشکیل مجموعه - انرژی تشکیل مجموعه بدون وجود بار q_A ← مجموعه با وجود بار q_A

کار لازم = منفی انرژی ناشی از وجود بار q_A در مجموعه

دقت کنیم که انرژی ناشی از وجود بار q_A، برابر مجموع انرژی‌ای که به سبب پتانسیل ناشی از آن، بر روی بارهای دیگر ایجاد می‌شود، (۹) انرژی‌ای که به سبب پتانسیل ناشی از بارهای دیگر، در محدوده بار q_A ایجاد می‌شود، می‌باشد. لذا

$$\text{کار لازم} = -\left\{ 2\frac{q_A q}{4\pi\epsilon_0 a} - 2\frac{q_A q}{4\pi\epsilon_0 (2a)} + 2\frac{q_A q}{4\pi\epsilon_0 (3a)} - \cdots \right\} \Rightarrow$$

$$\text{کار لازم} = -\frac{2q_A q}{4\pi\epsilon_0}\left\{ \frac{1}{a} - \frac{1}{2a} + \frac{1}{3a} - \cdots \right\} =$$

$$-\frac{q_A q}{2\pi\epsilon_0 a}\left\{ 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots \right\}$$

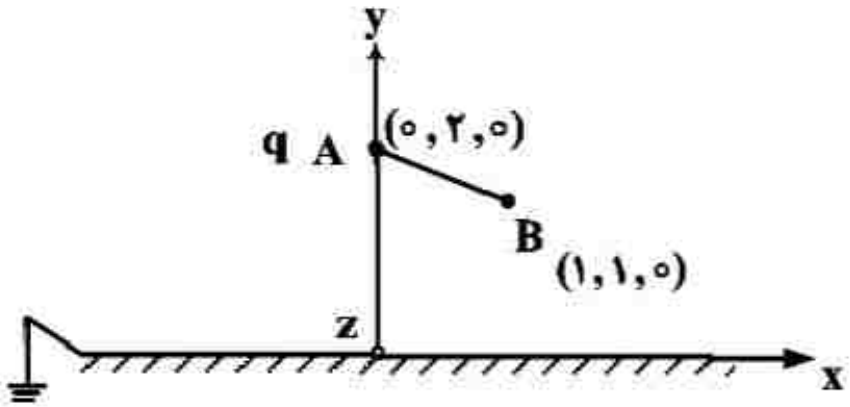
حال دقت کنیم که چون $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots$، بنابراین با قرار دادن $x = 1$ در طرفین رابطه ← $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots$. پس ←

پس گزینه (۲) درست است.

$$\text{کار لازم} = \frac{q_A q}{\pi\epsilon_0 a}\left\{ \frac{-\ln 2}{2} \right\}$$

پاسخ

۱۰۹- بار نقطه‌ای q در نقطه A به مختصات $(۰,۲,۰)$ و در بالای یک صفحه هادی کامل بی‌نهایت طویل که منطبق بر صفحه xz است، قرار دارد. این بار به‌آرامی از نقطه A به نقطه B منتقل می‌شود. کار انجام‌شده توسط صفحه هادی زمین‌شده برحسب $\frac{q^۲}{\pi\varepsilon_۰}$، چند ژول است؟



۱) $\frac{۱}{۳۲}$

۲) $\frac{۱}{۸}$

۳) $-\frac{۱}{۳۲}$

۴) $-\frac{۱}{۸}$

۹ـ۱ـ با توجه به تقارن، انرژی تشکیل را در هر حالت می یابیم ←

حالت A :

$$W_{\text{تشکیل}_A} = \frac{1}{2}\frac{-q^2}{4\pi\epsilon_0(4)} = \frac{-q^2}{32\pi\epsilon_0}$$

حالت B :

$$W_{\text{تشکیل}_B} = \frac{1}{2}\frac{-q^2}{4\pi\epsilon_0(2)} = \frac{-q^2}{16\pi\epsilon_0}$$

بنابراین ←

$$\text{کار صفر لازمی} = |W_B - W_A| = \frac{q^2}{32\pi\epsilon_0}$$

مثبت است.

پس جواب $+\frac{1}{32}$ است. گزینه ۱ صحیح است.

دقت کنیم که بر روی صفحه، بار $-q$ القا می شود (با فرض مثبت بودن q) لذا توسط صفحه لازمی، بار به آن جذب می شود.

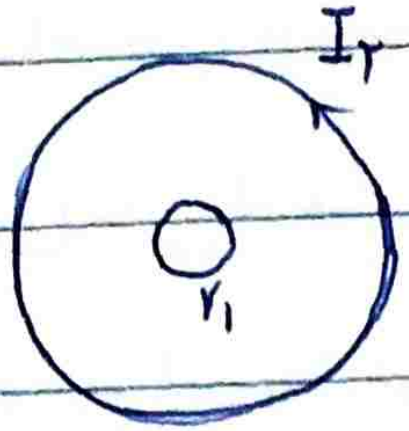
۱۱۰- دو حلقه سیمی دایروی هم‌مرکز و هم‌صفحه با شعاع‌های r_1 و r_2 در فضای آزاد در دست است. فرض کنید $r_2 >> r_1$ باشد. ضریب القای متقابل M برحسب هانری بین این دو حلقه کدام است؟

۱) $M = \frac{2\pi\mu_0 r_2^2}{r_1}$

۲) $M = \frac{\pi\mu_0 r_2^2}{2r_1}$

۳) $M = \frac{2\pi\mu_0 r_1^2}{r_2}$

۴) $M = \frac{\pi\mu_0 r_1^2}{2r_2}$



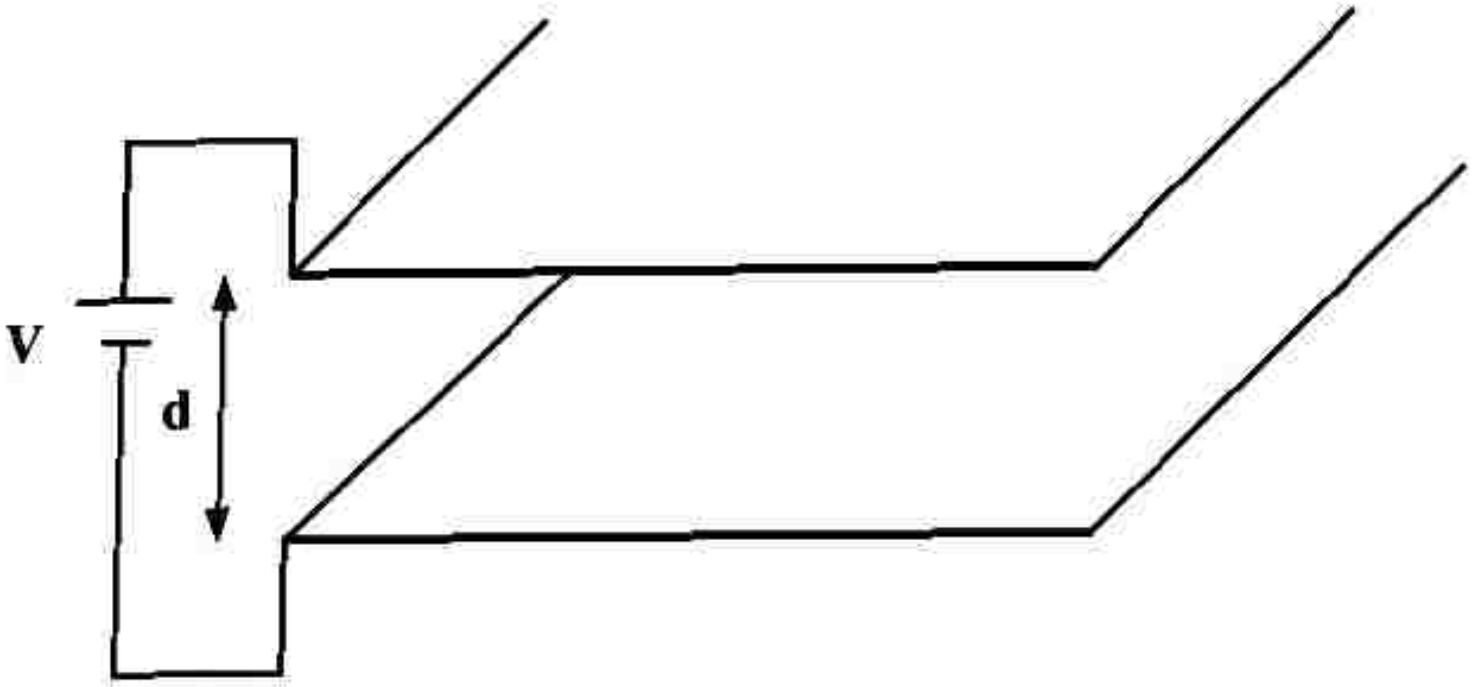
شار ناشی از میدان
به وجود آمده به علت
جریان دلخواه و فرضی

$$M = \frac{I_2 \text{ در محدوده حلقه به شعاع } r_1}{I_2} \quad r_2 \gg r_1 \rightarrow$$

$$M \simeq \frac{B_{I_2 \text{ در مرکز حلقه}} \; S_1}{I_2} = \frac{\left(\frac{\mu_0 I_2}{2r_2}\right)(\pi r_1^2)}{I_2} = \frac{\mu_0 \pi r_1^2}{2r_2^2}$$

لذا گزینه ۴ صحیح است.

۱۱۱- دو صفحه یک خازن به‌فاصله d از یگدیگر قرارگرفته‌اند. فشار وارده بر هرکدام از صفحات خازن در اثر اعمال میدان الکتریکی، برابر کدام است؟ (s سطح مقطع صفحات خازن و ρ_s چگالی بار سطحی صفحه است.)



۱) $\frac{\rho_s^2 V}{d}$

۲) $\frac{\rho_s^2}{2\varepsilon_0\varepsilon_r}$

۳) $\frac{\rho_s V}{d.s}$

۴) $\frac{\rho_s^2}{\varepsilon_0\varepsilon_r}$

$$W = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0\epsilon_r\frac{A}{d}V^2 \Rightarrow$$ ۱۱۱

$$|\vec{F}| = |\vec{\nabla}W| = \left|\frac{\partial}{\partial d}\left\{\frac{1}{2}\epsilon_0\epsilon_r\frac{A}{d}V^2\right\}\right| = \frac{\epsilon_0\epsilon_r V^2}{2}\left(\frac{A}{d^2}\right)$$

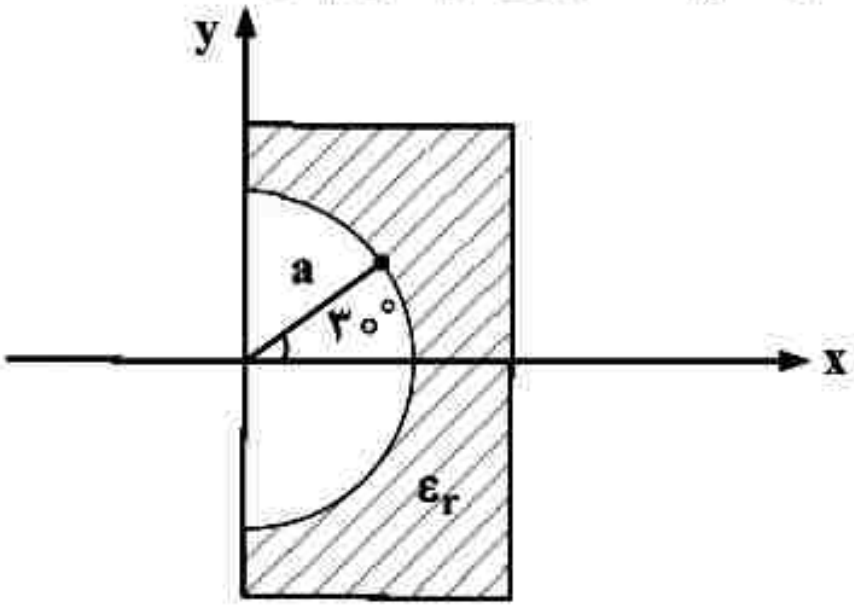
$$\Rightarrow P = \frac{F}{A} = \frac{\epsilon_0\epsilon_r}{2}\left(\frac{V}{d}\right)^2 = \frac{\epsilon_0\epsilon_r}{2}(E)^2 = \frac{\epsilon_0\epsilon_r}{2}\left(\frac{\rho_s}{\epsilon_0\epsilon_r}\right)^2 = \frac{\rho_s^2}{2\epsilon_0\epsilon_r}$$

صفحات تخت اند.

پس گزینه 2 صحیح است.

در کدامین نقطه ؟

۱۱۲- در شکل زیر، میدان الکتریکی در نقطه برابر $\bar{E} = 6\hat{a}_\rho - 4\hat{a}_\varphi$ است (ρ و φ مختصات دستگاه استوانه‌ای است). اگر بخواهیم میدان در $\rho > a$ در زاویه 30° موازی محور x باشد، ثابت دی‌الکتریک نسبی ε_r چقدر باید باشد؟



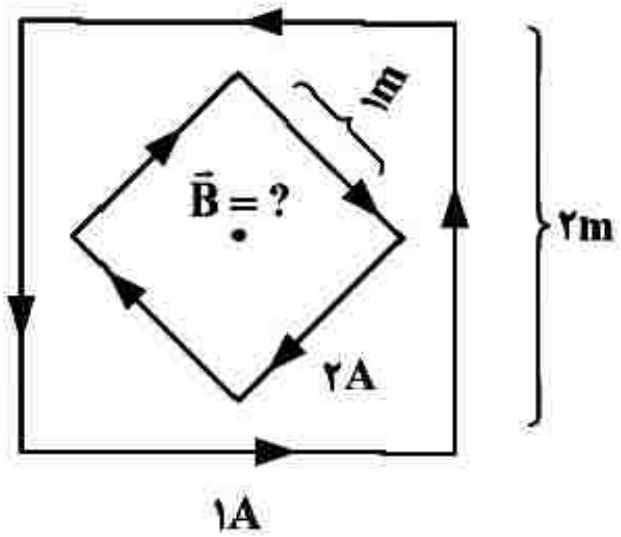
۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

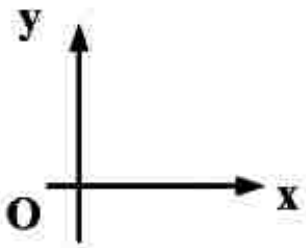
۲) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

۳) $\frac{4}{\sqrt{3}}$

۴) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

۱۱۳- مطابق شکل زیر، دو حلقه هادی مربع‌شکل به‌صورت هم‌مرکز در صفحهٔ xoy قرار دارند. طول ضلع حلقهٔ کوچک‌تر ۱m و حلقه بزرگ‌تر ۲m است. اگر از حلقه کوچک‌تر، جریان ۲ آمپر و از حلقه بزرگ‌تر، جریان یک آمپر عبور کند، چگالی شار مغناطیسی $\vec{B}$ در مرکز حلقه‌ها، برحسب $\frac{\mu_0}{\pi}\vec{a}_z$ چقدر است؟





۱) -1

۲) 1

۳) $-3\sqrt{2}$

۴) $3\sqrt{2}$

۱۱۳ـ میدان مغناطیسی ناشی از مربع حامل جریان I و ضلع a ، در مرکز آن برابر $\pm 2\sqrt{2}\frac{\mu_0 I}{\pi a}\hat{z}$ می‌باشد. که علامت (+) برای زمانی است که جریان "پادساعت‌گرد" باشد. (و علامت منفی ...) این نکته که گفتیم را با قانون دست راست بررسی کنید. (برای مربع‌های موجود در صفحه xoy) توجه کنیم که چرخش مربع، تغییری در میدان آن ایجاد نمی‌کند. کدام؟

میدان ناشی از مربع بزرگتر ←

$$2\sqrt{2}\frac{\mu_0(1)}{\pi(2)}\hat{z} = \sqrt{2}\frac{\mu_0}{\pi}\hat{z}$$

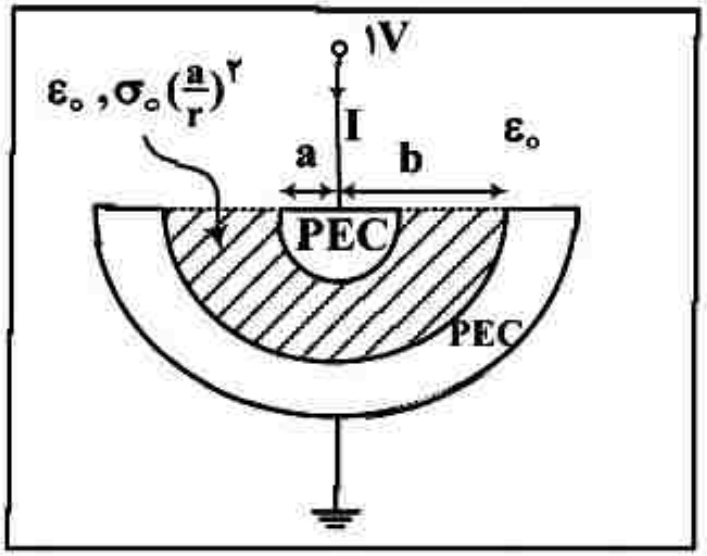
میدان ناشی از مربع کوچکتر ←

$$-2\sqrt{2}\frac{\mu_0(2)}{\pi(1)}\hat{z} = -4\sqrt{2}\frac{\mu_0}{\pi}\hat{z}$$

جمع دو میدان $-3\sqrt{2}\frac{\mu_0}{\pi}\hat{z}$.

پس گزینه (۳) درست است.

۱۱۴- مطابق شکل زیر، فضای بین دو الکترود نیم‌کروی به‌شعاع داخلی a و شعاع بیرونی b با یک ماده با ضریب رسانایی $\sigma = \sigma_\circ(\frac{a}{r})^۲$ و ضریب دی‌الکتریک $\varepsilon_\circ$ پر شده است. اگر اختلاف پتانسیل دو الکترود یک ولت باشد، جریان کل عبوری از رسانا (I) چقدر است؟



۱) $-۲\pi\sigma_\circ(b-a)$

۲) $-\frac{۲\pi\sigma_\circ a^۲}{b-a}$

۳) $-۲\pi\sigma_\circ a^۲(\frac{۱}{a}-\frac{۱}{b})$

۴) $-۲\pi\sigma_\circ a \ln(\frac{b}{a})$

۱۱۴- ابتدا مقاومت میان دو الکترود نیم کروی را می‌یابیم ←

$$R = \int_a^b \frac{dr}{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi} \sigma_0 \frac{a^2}{r^2} r^2 \sin\theta \, d\varphi d\theta} = \frac{b-a}{2\pi\sigma_0 a^2}$$

لذا

$$I = \frac{-V_0}{R} = \frac{-1}{R} = -\frac{2\pi\sigma_0 a^2}{b-a}$$

پس گزینه (۲) صحیح است.

۱۱۵- شدت میدان مغناطیسی نامتغیر با زمان در مختصات استوانه‌ای به‌صورت $\vec{H} = e^{-\rho}\hat{\varphi}$ داده شده است. چگالی جریان الکتریکی که این میدان مغناطیسی را ایجاد کرده است، کدام است؟

۱) $e^{-\rho}(1-\rho)\hat{z}$

۲) $e^{-\rho}(1-\rho)\hat{\varphi}$

۳) $\frac{e^{-\rho}(1-\rho)}{\rho}\hat{\varphi}$

۴) $\left[e^{-\rho}\left(\frac{1-\rho}{\rho}\right)\right]\hat{z}$ ✓

$$\vec{J} = \nabla \times \vec{H} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho\hat{\varphi} & \hat{z} \\ \partial/\partial\rho & \partial/\partial\varphi & \partial/\partial z \\ 0 & \rho e^{-\rho} & 0 \end{vmatrix} = \quad \text{-۱۱۵}$$

$$\frac{1}{\rho}\left\{\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho e^{-\rho})\right\}\hat{z} = \frac{1}{\rho}(e^{-\rho} - \rho e^{-\rho})\hat{z} = \frac{e^{-\rho}(1-\rho)}{\rho}\hat{z}$$

پس گزینه (۴) صحیح است.

شماره کارت زیر، مربوط به موسسه‌ی خیریه‌ای است که هدف آن، درمان و مراقبت از کودکان سرطانی است

۶۰۳۷ ۷۰۷۰ ۰۰۱۱ ۸۳۲۷