۲۶- فرض کنید $y=\ln x$ یک جواب معادله دیفرانسیل $y'=e^{-y}x^2+\frac{1}{x}-e^y$ باشد. اگر $g(x)=\frac{2ce^{x^2}+1}{2ce^{x^2}-1}$ و $y_c(x)$ جواب عمومی معادله باشد، آنگاه $\exp(y_c(x))$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{x}g(x)$

۲) $\frac{x}{g(x)}$

۳) $\frac{1}{xg(x)}$

۴) $xg(x)$

$$y'=e^{-y}x^2+\frac{1}{x}-e^y$$

$$e^y y'=x^2+\frac{e^y}{x}-e^{2y} \qquad Z=e^y \rightarrow Z'=y'e^y$$

$$Z'=x^2+\frac{Z}{x}-Z^2 \quad \text{ریکاتی} \qquad y=\ln x \rightarrow Z=x \rightarrow Z_2=x+\frac{1}{u}$$

$$Z'=1-\frac{u'}{u^2}$$

$$\cancel{1}-\frac{u'}{u^2}=\cancel{x^2}+\cancel{1}+\frac{1}{ux}-\cancel{x^2}-\frac{1}{u^2}-\frac{2x}{u}$$

$$u'=-\frac{u}{x}+1+2xu \rightarrow u'+u\left(\frac{1}{x}-2x\right)=1$$

$$u=e^{-\int\left(\frac{1}{x}-2x\right)dx}\left[\int e^{\int\left(\frac{1}{x}-2x\right)dx}dx+c\right]$$

$$u=e^{-(\ln x-x^2)}\left[\int e^{\ln x-x^2}dx+c\right] \Rightarrow u=\frac{e^{x^2}}{x}\left[\int xe^{-x^2}dx+c\right]$$

$$u=\frac{e^{x^2}}{x}\left(-\tfrac{1}{2}e^{-x^2}+c\right)=\frac{-1/2}{x}+\frac{ce^{x^2}}{x}$$

$$Z_2=x+\frac{1}{u}=x+\frac{1}{\frac{-1/2+ce^{x^2}}{x}}=\frac{x}{1}+\frac{x}{-1/2+ce^{x^2}}$$

$$=\frac{-x/2+cxe^{x^2}+x}{-1/2+ce^{x^2}}=\frac{x/2+cxe^{x^2}}{ce^{x^2}-1/2}=x\,\frac{ce^{x^2}+1/2}{ce^{x^2}-1/2}$$

$$\Rightarrow Z_2=x\,\frac{2ce^{x^2}+1}{2ce^{x^2}-1}=xg(x)$$

$$e^y=Z \longrightarrow \underline{e^y=xg(x)} \longrightarrow 4$$

عرفان صابر - فوق لیسانس برق از دانشگاه امیرکبیر - 12 سال سابقه تدریس

مدرس پر فروش ترین دوره های ریاضی یک - معادلات - ریاضی مهندسی در سایت مکتب خونه

09031909605-09374127120

۲۷- فرض کنید $y_1(x)=\sin x$ و $y_2(x)$ دو جواب مستقل خطی یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبه دوم همگن باشند. اگر رونسکین آنها در بازهٔ $(0,\frac{\pi}{2})$ برابر $\sin^2(x)$ باشد، آنگاه $y_2(x)$ کدام است؟

۱) $x\tan x$
۲) $x\cot x$
۳) $x\sin x$ ✓
۴) $x\cos x$

$$w=\begin{vmatrix} y_1 & y_1' \\ y_2 & y_2' \end{vmatrix} \rightarrow \sin^2 x=\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ y_2 & y_2' \end{vmatrix}$$

$$\sin^2 x = y_2'\sin x - y_2\cos x \xrightarrow{\div \sin x} \sin x = y_2' - y_2\cot x$$

$$y_2 = e^{+\int \cot x\,dx}\left[\int \sin x\, e^{\int -\cot x\,dx}\,dx + c\right]$$

$$y_2 = e^{\ln \sin x}\left[\int \underbrace{\sin x \cdot e^{-\ln \sin x}}_{1} + c\right] = \sin x\,[x+c]$$

$$= x\sin x \rightarrow 3$$

عرفان صابر - فوق لیسانس برق از دانشگاه امیرکبیر - 12 سال سابقه تدریس
مدرس پر فروش ترین دوره های ریاضی یک - معادلات - ریاضی مهندسی در سایت مکتب خونه
09031909605-09374127120

۲۸- حاصل $\int x^{3}J_{0}(x)dx$ ، کدام است؟

(راهنمایی: $(x^{\lambda}J_{\lambda}(x))' = x^{\lambda}J_{\lambda-1}(x)$ ، $J_{\lambda+1}(x)+J_{\lambda-1}(x)=\frac{2\lambda}{x}J_{\lambda}(x)$)

۱) $x^{2}\left(xJ_{1}(x)-2J_{2}(x)\right)$ ✓

۲) $x^{3}J_{1}(x)+2x^{2}J_{2}(x)$

۳) $x^{2}J_{1}(x)-xJ_{2}(x)$

۴) $xJ_{1}(x)-2J_{2}(x)$

طبق راهنمایی : $(x^{\lambda}J_{\lambda})' = x^{\lambda}J_{\lambda-1} \Rightarrow \int x^{\lambda}J_{\lambda-1} = x^{\lambda}J_{\lambda}$

$\lambda=1 \rightarrow \int xJ_{0} = xJ_{1}$ $\star$ $\lambda=2 \rightarrow \int x^{2}J_{1} = x^{2}J_{2}$

$$\int x^{3}J_{0}\,dx = \int x^{2}\cdot xJ_{0}(x)\,dx = \begin{cases} xJ_{0}\,dx = dv \\ \xrightarrow{\star} v = xJ_{1} \\ x^{2}=u \rightarrow 2x\,dx = du \end{cases}$$

$$= x^{2}\cdot xJ_{1} - \int xJ_{1}(2x\,dx) = x^{3}J_{1} - 2\underbrace{\int x^{2}J_{1}\,dx}_{\lambda=2}$$

$$= x^{3}J_{1} - 2x^{2}J_{2} = x^{2}(xJ_{1}-2J_{2}) \rightarrow ①$$

عرفان صابر - فوق لیسانس برق از دانشگاه امیرکبیر - 12 سال سابقه تدریس

مدرس پر فروش ترین دوره های ریاضی یک - معادلات - ریاضی مهندسی در سایت مکتب خونه

09031909605-09374127120

۲۹- فرض کنید $f(t)=t^n e^{-t}$. تبدیل لاپلاس $g(t)=e^t \dfrac{d^n f(t)}{dt^n}$، کدام است؟

۱) $\dfrac{\Gamma(n)(s-1)^n}{s^{n+1}}$

۲) $\dfrac{n!(s-1)^n}{s^{n+1}}$

۳) $\dfrac{(n+1)!s^n}{(s-1)^{n+1}}$

۴) $\dfrac{\Gamma(n)s^n}{(s-1)^{n+1}}$

$$t^n \xrightarrow{L} \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$\underbrace{e^{-t} t^n}_{f} \xrightarrow{L} \frac{n!}{(s+1)^{n+1}}$$

$$\frac{d^n}{dt^n} f \longrightarrow s^n \frac{n!}{(s+1)^{n+1}}$$

$$e^t \frac{d^n f}{dt^n} \longrightarrow (s-1)^n \frac{n!}{s^{n+1}} \longrightarrow 2$$

عرفان صابر - فوق لیسانس برق از دانشگاه امیرکبیر - 12 سال سابقه تدریس

مدرس پر فروش ترین دوره های ریاضی یک - معادلات - ریاضی مهندسی در سایت مکتب خونه

09031909605-09374127120

۳۰- جواب $y = y(x)$ از حل معادله انتگرال $\int_0^1 \frac{y(xt)}{\sqrt{1-t}}dt = \sqrt{x}$ ، کدام است؟

۱) $\frac{1}{\pi x}$

۲) $\frac{2}{\pi\sqrt{x}}$

۳) $\frac{1}{\pi}\sqrt{x}$

۴) $\frac{1}{\pi}x$

$$xt = u \to x\,dt = du \to dt = \frac{du}{x} \to \begin{cases} t = 0 \to u = 0 \\ t = 1 \to u = x \end{cases}$$

$$\int_0^x \frac{y(u)}{\sqrt{1-u/x}}\frac{du}{x} = \frac{1}{x}\int_0^x \frac{y(u)\,du}{\frac{\sqrt{x-u}}{\sqrt{x}}} = \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^x \frac{y(u)du}{\sqrt{x-u}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}\left(y(t) * \frac{1}{\sqrt{t}}\right) = \sqrt{x} \to y(t) * \frac{1}{\sqrt{t}} = x \xrightarrow{L}$$

$$y(s)\cdot\frac{\cancel{\Gamma(1/2)}\ \sqrt{\pi}}{s^{1/2}} = \frac{1}{s^2} \to y(s) = \frac{\frac{1}{s^2}}{\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}} = \frac{\sqrt{s}}{s^2\sqrt{\pi}}$$

$$y(s) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{1}{s^{3/2}} \to y(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\sqrt{x}}{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} = \frac{2\sqrt{x}}{\pi}$$

یادآوری

$$\left\{ x^\alpha \to \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}} \xrightarrow{\alpha=1/2} x^{1/2} \to \frac{\Gamma(3/2)}{s^{3/2}} \right.$$

$$\to L^{-1}\{s^{-3/2}\} = \frac{\sqrt{x}}{\Gamma(3/2)} = \frac{\sqrt{x}}{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}$$

گزینه صحیح نیست ← نزدیک‌ترین گزینه ۳

عرفان صابر - فوق لیسانس برق از دانشگاه امیرکبیر - 12 سال سابقه تدریس

مدرس پر فروش ترین دوره های ریاضی یک - معادلات - ریاضی مهندسی در سایت مکتب خونه

09031909605-09374127120