باسمه تعالی

پاسخ تشریحی سیگنال ارشد برق ۹۸

مهدی تقدسی
@mtsignal
@mtsignal_e

تحلیل کلی سوالات :

سطح سوالات سیگنال در کل بد نبوده و تقریباً مشابه سال گذشته بود (شاید کمی سخت‌تر). دو سوال (۱۰۶ و ۱۱۱) از جلد دوم طرح شده بود. دو سوال (۱۰۳ و ۱۰۷) تکراری آزمون دکتری و ارشد سالهای گذشته بود. یک سوال (۱۰۴) از ۱۰ صفحه خلاصه درس و یک سوال (۱۱۲) از چهار صفحه آخر فصل ۵ (نکته ۴۴) طرح شده بود که بارها بر اهمیت این دو قسمت تأکید کرده بودم. در ضمن تقریباً مشابه همه سوالات در تستها یا مثالهای متن درس در کتاب وجود داشت که اشاره به تک تک آنها از حوصله این متن خارج است

(۱۰۳

$$H(s)=\frac{s-1}{(s+2)(s+1)}\ ,\quad Re(s)>-1 \longrightarrow$$ زیرا سیستم علی است

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h'(t)e^{2t}dt = sH(s)\Big|_{s=-2} = \infty \longrightarrow$$ زیرا $s=-2$ در ROC قرار ندارد

(۱۰۴

سیستم حقیقی است، پس می‌توان از فازور استفاده کرد

$$y(n)=|H(\Omega_0)|\cos(\Omega_0 n+\theta+\measuredangle H(\Omega_0)) = |\Omega_0|\cos(\Omega_0 n+\theta+\measuredangle H(\Omega_0))$$

$$=\begin{cases}\Omega_0\cos(\Omega_0 n+\theta+\frac{\pi}{2}) & ,\ 0<\Omega_0<\pi\\ -\Omega_0\cos(\Omega_0 n+\theta-\frac{\pi}{2}) & ,\ -\pi<\Omega_0<0\end{cases} = -\Omega_0\sin(\Omega_0 n+\theta)$$

(۱.۵

$$H_1(\omega) = \frac{1+e^{-j\omega}}{۲} \longrightarrow \begin{cases} |H_1(0)| = 1 \\ |H_1(\pi)| = 0 \end{cases} \longrightarrow$$ پایین گذر

$$H_2(\omega) = \frac{1-e^{-j\omega}}{۲} \longrightarrow \begin{cases} |H_1(0)| = 0 \\ |H_1(\pi)| = 1 \end{cases} \longrightarrow$$ بالا گذر

(۱.۶

$$I = \pi\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ۴\pi t}{۴\pi t} \cdot \frac{\sin ۱۰\pi t}{۱۰\pi t} e^{j۶\pi t}\, dt + \pi\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ۴\pi t}{۴\pi t} \cdot \frac{\sin ۱۰\pi t}{۱۰\pi t} e^{-j۶\pi t}\, dt$$

$$= \frac{1}{۲} \cdot \frac{1}{۴}\Pi\left(\frac{\omega}{۸\pi}\right) * \frac{1}{۱۰}\Pi\left(\frac{\omega}{۲۰\pi}\right)\Bigg|_{\omega=-۶\pi} + \frac{1}{۲}\frac{1}{۴}\Pi\left(\frac{\omega}{۸\pi}\right) * \frac{1}{۱۰}\Pi\left(\frac{\omega}{۲۰\pi}\right)\Bigg|_{\omega=۶\pi} = \frac{\pi}{۵}$$

(۱۰۷

حل سؤال با استفاده از جدول فوریه :

$$I=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2\frac{\pi}{2}n}{n^2}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\pi^2\left|\frac{\sin\frac{\pi}{2}n}{\pi n}\right|^2 \underset{\text{پارسوال}}{=} \pi^2\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\Pi\left(\frac{\omega}{\pi}\right)\right|^2 d\omega=\frac{\pi^2}{2}$$

خواهش می‌کنم این سؤالات رو با سری فوریه و حفظ کردن فرمول‌های ضرایب سری فوریه حل نکنید!

کلاً هیچوقت به دنبال حفظ کردن ضرایب سری فوریه سیگنال‌های مختلف نباشید چون هیچگاه به آنها نیاز پیدا نخواهید کرد.

۱۰۸)

$$y(n) = \left[\left(x(n)\cdot \varphi_1[n] \right) * h(n) \right] \cdot \varphi_2(n)$$

با α برابر کردن x ، خروجی نیز α برابر می‌شود پس سیستم خطی است.

به‌طور کلی LTI بودن (در واقع TI بودن) سیستم نیز بستگی به φ_1 و φ_2 دارد.

البته این سؤال در حوزه فرکانس نیز قابل حل می‌باشد.

(۱۵۹

$$\begin{cases} z(n) = x_{(2)}(n) \\ w(n) = z(n) + \frac{1}{2} z(n-1) + \frac{1}{4} z(n-2) \\ y(n) = w(2n) \end{cases}$$

$$y(n) = z(2n) + \frac{1}{2} z(2n-1) + \frac{1}{4} z(2n-2)$$

$$= \underbrace{x_{(2)}(2n)}_{x(n)} + \frac{1}{2} \underbrace{\cancel{x_{(2)}(2n-1)}}_{0} + \frac{1}{4} \underbrace{x_{(2)}(2n-2)}_{x(n-1)} = x(n) + \frac{1}{4} x(n-1)$$

زیرا ۲n مضرب ۲ است

زیرا ۲n-۱ مضرب ۲ نیست

زیرا ۲n-۲ هم مضرب ۲ است

۱۰)

$$y(n) = 2x(n) + x(n-1) - \frac{1}{j} n x(n)$$

مشخص است که سیستم مورد TV است.

---

۱۱)

$$f(t) = t^2 - 1 = 0 \longrightarrow \begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = -1 \end{cases}$$

$$\delta(t^2-1) = \frac{1}{|f'(1)|}\delta(t-1) + \frac{1}{|f'(-1)|}\delta(t+1) = \frac{1}{2}\delta(t-1) + \frac{1}{2}\delta(t+1)$$

(۱۱۲

$x(t)$ حقیقی $\Longleftrightarrow$ $\angle X(\omega)$ فرد و $|X(\omega)|$ زوج

$x(t)$ حقیقی $\Longleftrightarrow$ $Im[X(\omega)]$ فرد و $Re[X(\omega)]$ زوج

$x_1(t)$ شرط اول را دارد پس حقیقی است . $x_2(t)$ شرط دوم را ندارد پس حقیقی نیست

(۱۱۳

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} X^2(\omega)\, d\omega = 2\pi\, x(t) * x(t) \Big|_{t=0} = 2\pi$$

(۱۱۴

این تست از مبحث "(محاسبه پاسخ ضربه از روی ورودی - خروجی) در فصل ۹ مرتبط.

طبق فرض تست و با استفاده از نکته حدود (نکته ۶۴)، $h(n)$ فقط در بازه [۰ و ۱] مقدار دارد. البته ممکن است این شبهه ایجاد شود که چون نمی‌دانیم بازه h محدود است، پس حق استفاده از نکته ۶۴ را نداریم! اما چون شرط محدود برای همه ورودی و خروجی‌ها طبق بیان

ثابت برقرار است، پس حالت استثناء نداریم؛ در نتیجه می‌توان h را در بازه محدود فرض کرد.

حال با روش نقطه‌گذاری داریم:

$$x(n) = 8\delta(n+3) + 4\delta(n+2) + 2\delta(n+1) + \delta(n) + 2\delta(n-1) + 4\delta(n-2) + 8\delta(n-3)$$

$$y(n) = x(n) * h(n) = 8h(n+3) + 4h(n+2) + 2h(n+1) + h(n) + 2h(n-1) + 4h(n-2) + 8h(n-3)$$

$$\begin{aligned} y(0) &= h(0) + 2h(-1) = 4 \\ y(3) &= 8h(0) = -16 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} h(0) = -2 \\ h(-1) = 3 \end{cases} \Rightarrow y(2) = 4h(0) + 8h(-1) = 16$$