« به نام خدا »

پاسخ تشریحی ریاضیات مهندسی کنکور ارشد برق و مکانیک ۹۸

@Riazitest
021-8506

توسط : قاسم شادلو

۱- با استفاده از مقدار $\oint_{|z|=1} \frac{e^{az}}{z}\,dz$ ، حاصل $\int_0^{\pi} e^{a\cos\theta}\cos(a\sin\theta)\,d\theta$ کدام است؟

۱) $\frac{3\pi}{4}$ ۲) π ۳) $\pi/8$ ۴) $\frac{\pi}{2}$

سطح سؤال : متوسط مدت زمان پیشنهادی : ۲ دقیقه

هدایت : صفحه ۹۴ و ۹۵ جزوه کلاسی - تابستان و پاییز ۹۷ - پارت ۱ + مثال ۴

پاسخ : گزینه ۲ صحیح است.

انتگرال مورد بررسی زوج است

$$\int_0^{\pi} e^{a\cos\theta}\cos(a\sin\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cdots\cdots$$

اگر رابطه $\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}$ را در نظر بگیریم

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} e^{a\cos\theta}\left(e^{ia\sin\theta} + e^{-ia\sin\theta}\right)d\theta$$

if $|z|=1$, $e^{i\theta}=z$, $e^{-i\theta}=\bar{z}=\frac{1}{z}$

$$= \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} e^{a(\cos\theta+i\sin\theta)}\,d\theta + \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} e^{a(\cos\theta-i\sin\theta)}$$

ادامه پاسخ در صفحه بعد ...

$$= \frac{1}{4}\underbrace{\int_{|z|=1} e^{az}\,\frac{dz}{iz}}_{\mathrm{I}} + \frac{1}{4}\underbrace{\int_{|z|=1} e^{\frac{a}{z}}\,\frac{dz}{iz}}_{\mathrm{II}}$$

$$\boxed{d\theta = \frac{dz}{iz}}$$

درسنامه: همواره در انتگرال مختلط قانون تبدیلات فوق قابل اعمال می‌باشند
اگر مسیر انتگرال گیری $|z|=1$ (دایره واحد) باشد

I تیلور $\left\{ z=0 \right.$ قطب $\xrightarrow{\text{بسط}} \frac{1}{iz}\left(1+az+\frac{a^2z^2}{2!}+\cdots\right) \to \operatorname{Res}\Big|_0 = \frac{1}{i}$

II لوران $\left\{ z=0 \right.$ اساسی $\xrightarrow{\text{بسط}} \frac{1}{iz}\left(1+\frac{a}{z}+\frac{a^2}{2!z^2}+\cdots\right) \to \operatorname{Res}\Big|_0 = \frac{1}{i}$

حاصل انتگرال $I = \frac{1}{4}\left(2\pi i\left(\frac{1}{i}\right)\right) + \frac{1}{4}\left(2\pi i\left(\frac{1}{i}\right)\right) = \pi$ ۲ ☑

۲- فرض کنید e^{-2w} ضریب انتگرال فوریه کسینوسی تابع $f(x)=\frac{x}{x^2+4}$ باشد.

حاصل انتگرال $\int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+4)^2}\,dx$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) 2π ۳) $\frac{1}{2\pi}$ ۴) $\frac{2}{\pi}$

سطح سئوال: خیلی آسان زمان پیشنهادی: ۴۰ ثانیه

هدایت: صفحه ۳۴ و صفحه ۶۴ جزوه طلایی - تابستان و پاییز ۹۷

پاسخ: گزینه x صحیح است (قطعاً نشانه گزینه صحیح وجود ندارد)

روش اول: طبق اطلاعات مسئله ⟵

$$\underbrace{\frac{x}{x^2+4}}_{f(x)} = \int_0^\infty \underbrace{e^{-2w}}_{A(w)} \cos wx \, dw$$

کافی است رابطه پارسوال را بنویسیم:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)\,dx = \int_0^\infty \left(A^2(w)+B^2(w)\right)dw$$

@Riazitest
021-8506

$$\frac{2}{\pi}\overbrace{\int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+4)^2}\,dx}^{I} = \int_0^\infty \left(e^{-2w}\right)^2 dw \rightarrow \frac{2}{\pi} I = -\frac{1}{4} e^{-4w}\Big|_0^\infty$$

$$\frac{2}{\pi} I = \frac{1}{4} \longrightarrow \boxed{I = \frac{\pi}{8}}$$

روش دوم:

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+4)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(x^2+4)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{z^2}{(z^2+4)^2}\,dz$$

$\operatorname{Im} z > 0 \longrightarrow \dots$

روش سوم: با استفاده از روابط تبدیل فوریه نیز مسئله حل می‌گردد.

۳- نقش تصویر ناحیه $D=\{(x,y) \mid 1\le x\le 2,\ y\le 2\}$ تحت نگاشت $w=e^{-\pi(iz+2-i)}$ کدام است؟

۱) $\{w \mid |w|\ge 1,\ Re(w)\ge 0\}$

۲) $\{w \mid |w|\ge 1,\ Im(w)\le 0\}$

۳) $\{w \mid |w|\le 1,\ Re(w)\ge 0\}$

۴) $\{w \mid |w|\le 1,\ Im(w)\le 0\}$

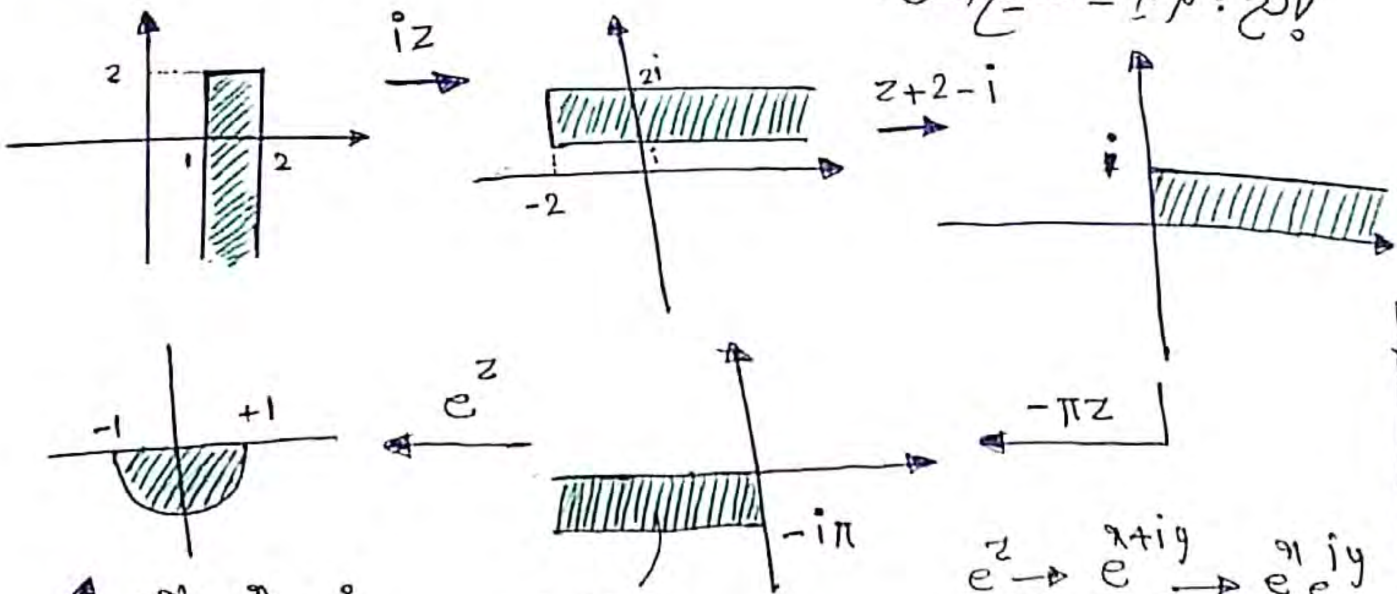
سطح سؤال: خیلی آسان

مدت زمان پیشنهادی: ۱ دقیقه

هدایت: صفحه ۸۰ جزوه کلاسی - تابستان ریاضی ۹۷

$w:\ iz,\ z+2-i,\ -\pi z,\ e^z$

پاسخ: گزینه ۴ صحیح است.



$e^z \to e^{x+iy} \to e^x e^{iy}$

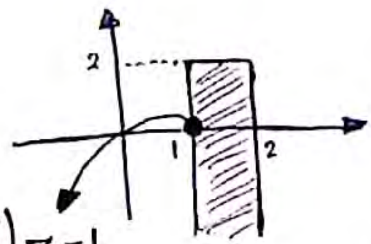
$\rho=e^x,\ \varphi=y$

$-\infty\le x\le 0$
$-\pi\le y\le 0$

$e^{-\infty}\le e^x\le e^0$
$-\pi\le\varphi\le 0$

** اگر حوصله رسم نداری ـ بدون یا استفاده از نقطه‌آزمایی روش دوم کار شود!!

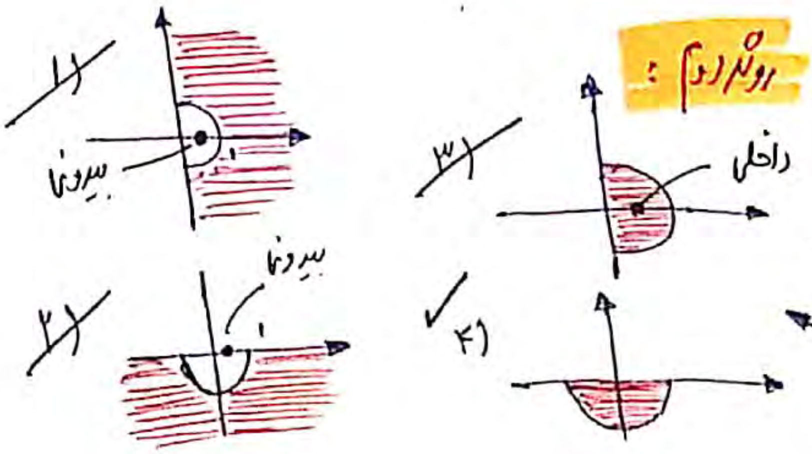
روش دوم:



$z=1$ (نقطه مرزی)

$w=e^{-2\pi} \to$ عدد حقیقی بین صفر تا ۱

جواب ۴



۴ـ جواب مسأله گرمای زیر کدام است؟

$$\begin{cases} u_t(x,t) = 4u_{xx}(x,t) + 2u(x,t) & 0<x<\pi,\ t\geq 0 \\ u(x,0) = f(x) & 0<x<\pi \\ u(0,t) = u_x(\pi,t) = 0 \end{cases}$$

سطح سؤال: خیلی آسان

مدت زمان پیشنهادی: ۵۰ ثانیه

۱) $$\begin{cases} u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-(4n^2-4n-1)t} \sin\left(\frac{2n-1}{2}\right)x \\ a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin\left(\frac{2n-1}{2}\right)x\,dx \end{cases}$$

هدایت: صفحه ۱۶۴ و ۱۶۵ جزوه کلاسی ترم تابستان ریاضی ۴ ✓

۲) $$\begin{cases} u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-(4n^2-4n-1)t} \cdot \cos\left(\frac{2n-1}{2}\right)x \\ a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos\left(\frac{2n-1}{2}\right)x\,dx \end{cases}$$

پاسخ: ابتدا با توجه به شرایط مرزی تابع ویژه و مقادیر ویژه:

$$\sin\left(\frac{2n-1}{2}\right)x \quad \lambda$$

$2\ \boxed{\times}\quad 3\ \boxed{\times}$

۳) $$\begin{cases} u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-(4n^2-4n+3)t} \cdot \cos\left(\frac{2n-1}{2}\right)x \\ a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos\left(\frac{2n-1}{2}\right)x \end{cases}$$

با استفاده از روش جداسازی متغیرها

$$u = A(x)B(t)$$

۴) $$\begin{cases} u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-(4n^2-4n+3)t} \cdot \sin\left(\frac{2n-1}{2}\right)x \\ a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin\left(\frac{2n-1}{2}\right)x \end{cases}$$

$$AB' = 4A''B + 2AB$$

$$\xrightarrow{\div AB} \frac{B'}{B} = 4\frac{A''}{A} + 2$$

$$\frac{1}{4}\left(\frac{B'}{B} - 2\right) = \frac{A''}{A} = -\lambda^2$$

$$\rightarrow \frac{B'}{B} = -4\lambda^2 + 2 \xrightarrow{\int} \ln B = (-4\lambda^2+2)t \rightarrow B(t) = e^{(-4\lambda^2+2)t}$$

$$\boxed{\lambda = \frac{2n-1}{2}} \rightarrow$$ جایگزاری: $$e^{-(4n^2-4n+3)t}$$

$4\ \boxed{\checkmark}$

ج ۵

۵ - مسأله موج دو بعدی زیر را درون دایره واحد در نظر بگیرید

$$\begin{cases} u_{tt}(r,\theta,t) = 9\nabla^2 u(r,\theta,t) & 0<r<1,\ 0\leq\theta\leq 2\pi,\ t\geq 0 \\ u(r,\theta,0)=1 & 0\leq r\leq 1,\ 0\leq\theta\leq 2\pi \\ u_t(r,\theta,0)=0 \\ u(1,\theta,t)=0 \end{cases}$$

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\lambda_n t + b_n\sin\lambda_n t\right)J_0(\alpha_n r)$$

۱) $b_n = 0\ ,\ a_n = \dfrac{2}{J_0^2(\alpha_n)}\displaystyle\int_0^1 r J_1(\alpha_n r)\,dr$

۲) $b_n = 0\ ,\ a_n = \dfrac{2}{J_1^2(\alpha_n)}\displaystyle\int_0^1 r J_0(\alpha_n r)\,dr$

۳) $b_n = \dfrac{2}{3\alpha_n J_0^2(\alpha_n)}\displaystyle\int_0^1 r J_1(\alpha_n r)\,dr\ ,\ a_n = 0$

۴) $b_n = \dfrac{2}{3\alpha_n J_1^2(\alpha_n)}\displaystyle\int_0^1 r J_0(\alpha_n r)\,dr\ ,\ a_n = 0$

سطح سئوال: غیراستاندارد (خارج از سرفصل) مدت زمان پاسخگویی برای تست: ۲ دقیقه

پاسخ: گزینه ۲ صحیح است

روش اول: با توجه به اینکه سرعت اولیه (u_t) صفر است ضریب $\sin\lambda_n t$ صفر می‌شود $\boxed{\times}$ 4 $\boxed{\times}$ 3

با اعمال شرط غیرهمگن خواهیم داشت:

$$u(r,\theta,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0(\alpha_n r) = 1$$

با توجه به رابطه سری‌ها و توابع بسل خواهیم داشت:

@

ادامه پاسخ در صفحه بعد ...

اگر دلانه باشیم:

$$f(r,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n J_n(\lambda_n r)$$

آنگاه a_n طبق رابطه زیر محاسبه می‌گردد

$$a_n=\frac{\int_0^L r\, f(r,\theta)\, J_n(\lambda_n r)\,dr}{\left(\frac{L^2}{2}\right) J_{n+1}^2(\lambda_n L)}$$

@Riazitest
021-8506

که البته با پیش‌فرض‌های این رابطه صحیح است. در روش اثبات دانشجویان عزیز می‌توانند $f(r,\theta)=G_n(r)$ فرض و شرایط مرزی برای θ اعمال کرده و همچنین

$$f=C_0 J_0(\lambda_0 r)+C_1 J_1(\lambda_1 r)+\cdots$$

در نتیجه توابع خاص بسل قرار گیرد به رابطه خاصی از روابط تعامد یابند.

در این صورت ← در نهایت خواهیم داشت:

$$a_n=\frac{1}{\left(\frac{(1)^2}{2}\right) J_{0+1}^2(\alpha_n(1))}\int_0^1 (r)(1)J_0(\alpha_n r)\,dr=\frac{2}{J_1^2(\alpha_n)}\int_0^1 r\,J(\alpha_n r)\,dr$$

۲ $\boxed{✓}$

روش ۲: برای انتخاب بین ۲ گزینه باقی‌مانده دانشجویان باید حتماً این موضوع را بدانند که در تبدیل روابط $\sum$ به $\int$ ضریب اسکالری می‌ماند (مثل فوریه) بنابراین گزینه ۲ $\boxed{✓}$ صحیح می‌باشد.

در پایان آرزوی سلامتی و موفقیت برای دانشجویان عزیز

هرگونه کپی برداری از این اثر پیگرد قانونی خواهد داشت

استفاده از مطالب فوق و انتشار رایگان آن در تمامی کانال ها و فضاهای مجازی برای دسترسی دانشجویان عزیز بلامانع است.

شاردو
۹۸/۳/۲۴

@Riazitest
@engmahan
021- 8506
0935-9391194

تهران - خیابان ولیعصر - بالاتر از خ فتح تقاطع - مولم ماهان

مرکز تخصصی مهندسی برق، مهندسی عمران، مکانیک، صنایع، کامپیوتر و it، معماری، مهندسی پزشکی، مواد و مهندسی شیمی