



سوالات ریاضی مهندسی

کجه ۱- اگر $u(x,t)$ جواب مسئله موج زیر باشد، مقدار تقریبی $u(0, 1/3, 1/4)$ کدام است؟

$$\begin{cases} u_{tt} - 9u_{xx} = 0, & 0 < x < 2, t > 0 & 1/24 \quad (1) \\ u(x, 0) = 2x + 1 & & 1/79 \quad (2) \\ u_t(x, 0) = x, & 0 \leq x \leq 2 & 1/96 \quad (3) \\ u(0, t) = u(2, t) = 0, & t \geq 0 & 2/15 \quad (4) \end{cases}$$

کجه ۲- فرض کنید $z = x + iy$ باشد. مقدار ماکزیمم $|\sin z|$ در دامنه مربعی شکل $D = \{(x,y), 0 \leq x, y \leq 2\pi\}$ کدام است؟

$$\cosh 2\pi \quad (1) \quad \sinh 2\pi \quad (2) \quad e^{2\pi} \quad (3) \quad 1 \quad (4)$$

کجه ۳- جواب مسئله پواسن زیر کدام است؟

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} = \frac{\sin \theta}{r^2}, & 0 < r < 2, 0 < \theta < 2\pi \\ \omega(r, 0) = 0 \\ \omega(2, \theta) = \sin 3\theta \end{cases}$$

$$\omega(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin 3n\theta \quad (1)$$

$$\omega(r, \theta) = \frac{1}{2} r \sin \theta + \frac{1}{8} r^3 \sin \theta \quad (2)$$

$$\omega(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (r^n + r^{-n}) \sin 3n\theta \quad (3)$$

$$\omega(r, \theta) = \left(\frac{1}{2} r - 1\right) \sin \theta + \frac{1}{8} r^3 \sin 3\theta \quad (4)$$

کجه ۴- انتگرال فوریه تابع $f(x) = \begin{cases} |\sin x|, & |x| \leq \pi \\ 0, & |x| > \pi \end{cases}$ کدام است؟

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1 + \cos(\omega\pi)}{1 - \omega^2} \cos(\omega x) d\omega \quad (1)$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1 + \cos(\omega\pi)}{1 - \omega^2} \cos(\omega x) d\omega \quad (2)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1 + \cos(\omega\pi)}{1 - \omega^2} \cos(\omega x) d\omega \quad (3)$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1 + \cos(\omega\pi)}{1 - \omega^2} \cos(\omega x) d\omega \quad (4)$$

کجه ۵- اگر C مرز نیم‌دایره فوقانی $|z|=r$ در جهت مثبت و $I(r) = \int_C \frac{e^{iz}}{z} dz$ باشد، $\lim_{r \rightarrow \infty} I(r)$ کدام است؟

$$\infty \quad (1) \quad \pi \quad (2) \quad 1 \quad (3) \quad 0 \quad (4)$$

کجه ۶- مسئله گرمای زیر را در نظر بگیرید، اگر $v(x,s)$ تبدیل لاپلاس $u(x,t)$ باشد، آنگاه $v(x,s)$ در کدام معادله صدق می‌کند؟

$$\begin{cases} u_t(x,t) - fu_{xx}(x,t) = 3u(x,t), & x > 0, t > 0 \\ u(x, 0) = -e^{-x}, & x > 0 \\ u(0, t) = 0, & t \geq 0 \end{cases}$$

$$v''(x,s) + (fs - 3)v(x,s) = e^{-x} \quad (1)$$

$$4v''(x,s) + (3 - fs)v(x,s) = se^{-x} \quad (2)$$

$$v''(x,s) + (3 - fs)v(x,s) = se^{-x} \quad (3)$$

$$4v''(x,s) + (s - 3)v(x,s) = se^{-x} \quad (4)$$

کجه ۷- معادله دیفرانسیل جزئی ناهمگن زیر با تغییر متغیر $u(x,t) = v(x,t) + r(x)$ به یک معادله همگن با شرایط مرزی همگن تبدیل می‌شود. $v(x, 0)$ کدام است؟

$$\begin{cases} u_{xx} = u_t + x - 1, & 0 < x < 2, t > 0 \\ u(0, t) = 3, & u(2, t) = -1, t > 0 \\ u(x, 0) = 1 - x^2, & 0 < x < 2 \end{cases}$$

$$-\frac{7}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{3}x - 2 \quad (1)$$

$$-\frac{7}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{3}x - 2 \quad (2)$$

$$-\frac{7}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{3}x + 3 \quad (3)$$

$$-\frac{7}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{3}x + 3 \quad (4)$$

کجه ۸- اگر $v(x,y)$ مزدوج همساز تابع $u(x,y) = (x^2 - y^2 + 1)^2 - 4x^2y^2$ با شرط $v(0,0) = 0$ باشد، مقدار $v(1,1)$ کدام است؟

$$-4 \quad (1) \quad 4 \quad (2) \quad -1 \quad (3) \quad 1 \quad (4)$$

۹- اگر $F_s\{f(x)\} = \int_0^\infty f(x) \sin \omega x dx$ تبدیل فوریه سینوسی تابع $f(x)$ باشد، تبدیل فوریه سینوسی تابع $f(x) = \frac{x}{x^2 + 4}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{2} e^{-2\omega}$
- (۲) $\frac{\pi}{2} e^{2\omega}$
- (۳) $\pi e^{-2\omega}$
- (۴) $e^{2\omega}$

۱۰- سری نیم‌دامنه سینوسی تابع $f(x) = x(\pi - x)$ در فاصله $0 < x < \pi$ کدام است؟

- (۱) $\sum_{m=0}^\infty \frac{4}{(\pi m + 1)\pi} \sin(\pi m + 1)x$
- (۲) $\sum_{m=0}^\infty \frac{1}{(\pi m + 1)^2 \pi} \sin(\pi m + 1)x$
- (۳) $\sum_{m=1}^\infty \frac{2}{m\pi} \sin \pi m x$
- (۴) $\sum_{m=1}^\infty \frac{1}{m^2 \pi} \sin \pi m x$

۱۱- اگر $F(\omega, t) = \int_{-\infty}^\infty f(x, t) e^{-i\omega x} dx$ تبدیل فوریه $f(x)$ باشد، تبدیل فوریه جواب مسئله زیر کدام است؟

- (۱) $\int_0^t F(\omega, \tau) e^{a^2 \omega^2 (t-\tau)} d\tau$
- (۲) $\int_0^t F(\omega, \tau) e^{-a^2 \omega^2 (t-\tau)} d\tau$
- (۳) $\int_0^\infty F(\omega, \tau) e^{-a^2 \omega^2 (t-\tau)} d\tau$
- (۴) $\int_{-\infty}^\infty F(\omega, \tau) e^{-a^2 \omega^2 (t-\tau)} d\tau$

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x, t), & t > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

۱۲- فرض کنید تابع تحلیلی $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ برای هر $z \in \mathbb{C}$ در نامساوی $|f(z) - 2z^2 - iz| \leq \sqrt{2}$ صدق کند. در این صورت مقدار $\oint_{|z|=1} f\left(\frac{1}{z}\right) dz$ کدام است؟

- (۱) $2\pi i$
- (۲) $-2\pi i$
- (۳) 2π
- (۴) -2π

۱۳- تصویر خط راست $2x + 3y = 5$ تحت نگاشت $w = u + iv = \frac{1}{z}$ کدام است؟

- (۱) $(u - \frac{1}{5})^2 + (v + \frac{3}{10})^2 = \frac{13}{100}$
- (۲) $(u - \frac{1}{5})^2 + (v - \frac{3}{10})^2 = \frac{13}{100}$
- (۳) $(u + \frac{1}{5})^2 + (v - \frac{3}{10})^2 = \frac{13}{100}$
- (۴) $(u + \frac{1}{5})^2 + (v + \frac{3}{10})^2 = \frac{13}{100}$

۱۴- فرم کلی جواب مسئله موج زیر کدام است؟

$$\begin{cases} u_{tt}(x, y, t) - 9\nabla^2 u(x, y, t) = \begin{cases} te^{-|x+y|} & 0 < x < 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}, & y \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, y, 0) = \begin{cases} x+y & 0 < x < 1, -2 < y < 2 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases} \\ u_t(x, y, 0) = 0, & x > 0, y \in \mathbb{R} \\ u(0, y, t) = 0, & y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

- (۱) $u(x, y, t) = \int_{-\infty}^\infty \int_0^1 (A_\omega \cos \omega t + B_\omega \sin \omega t + C_\omega t + D_\omega) e^{i\omega y} \sin(\omega x) dx dy$
- (۲) $u(x, y, t) = \int_{-2}^2 \int_0^1 (A_\omega \cos \omega t + B_\omega \sin \omega t + C_\omega t + D_\omega) e^{i\omega y} \sin(\omega x) dx dy$
- (۳) $u(x, y, t) = \int_0^\infty \int_0^\infty (A_\omega \cos \omega t + B_\omega \sin \omega t + C_\omega t + D_\omega) e^{i\omega y} \sin(\omega x) dx dy$
- (۴) $u(x, y, t) = \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty (A_\omega \cos \omega t + B_\omega \sin \omega t + C_\omega t + D_\omega) e^{i\omega y} \sin(\omega x) dx dy$

۱۵- اگر $y(x)$ جواب معادله دیفرانسیل $y'' - 4y' + 3y = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$ با شرط $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} y'(x) = 0$ باشد، تبدیل فوریه $y(x)$ کدام است؟

(راهنمایی: $F\{y(x)\} = \int_{-\infty}^\infty y(x) e^{-i\omega x} dx$)

- (۱) $\frac{\sin 2\omega}{\omega^2 + 4i\omega - 3}$
- (۲) $\frac{\sin \omega}{\omega^2 + 4i\omega - 3}$
- (۳) $\frac{-2 \sin \omega}{\omega(\omega^2 + 4i\omega - 3)}$
- (۴) $\frac{2 \sin \omega}{\omega(\omega^2 + 4i\omega - 3)}$



پاسخنامه ریاضی مهندسی

۱- گزینه «۲» از سوالات بسیار پرتکرار در آزمون‌های کارشناسی ارشد و دکتری که هم در کتاب و هم در آزمون‌های آزمایشی هم بر روی آن تمرکز ویژه‌ای

داشته‌ایم. از روش جبری کمک می‌گیریم:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{c}} [f^*(x+ct) + f^*(x-ct)] + \frac{1}{\sqrt{c}} [G^*(x+ct) - G^*(x-ct)]$$

که در این سؤال $c=3$, $x=0/4$, $t=1/3$ است. چون هر دو شرط مرزی روی u است، پس دوره تناوب $4=2 \times 2$ است. با این توضیحات سراغ محاسبه می‌رویم:

$$u(0/4, 1/3) = \frac{1}{\sqrt{3}} [f^*(0/4 + 3 \times 1/3) + f^*(0/4 - 3 \times 1/3)] + \frac{1}{\sqrt{3}} [G^*(0/4 + 3 \times 1/3) - G^*(0/4 - 3 \times 1/3)]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} [f^*(4/3) + f^*(-3/5)] + \frac{1}{\sqrt{3}} [G^*(4/3) - G^*(-3/5)]$$

دقت کنید مقادیر داخل پرانتزها یعنی دو عدد $4/3$ و $-3/5$ خارج از بازه $[0, 2]$ هستند، پس باید با استفاده از دوره تناوب آن‌ها را درون بازه بیاوریم! اگر به اندازه‌ی یک دوره تناوب از $4/3$ کم کنیم، به عدد $0/3$ و اگر به اندازه یک دوره تناوب به $-3/5$ اضافه کنیم، به عدد $0/5$ می‌رسیم، پس داریم:

$$u(0/4, 1/3) = \frac{1}{\sqrt{3}} [f^*(0/3) + f^*(0/5)] + \frac{1}{\sqrt{3}} [G^*(0/3) - G^*(0/5)]$$

ضابطه‌ی f که معلوم است، $f = 2x + 1$. ضابطه‌ی G هم با انتگرال‌گیری از $g(x) = x$ به دست می‌آید:

$$G(x) = \int_0^x g(x) dx = \frac{x^2}{2}$$

$$u(0/4, 1/3) = \frac{1}{\sqrt{3}} [2 \times 0/3 + 1 + 2 \times 0/5 + 1] + \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\frac{(0/3)^2}{2} - \frac{(0/5)^2}{2} \right] = \frac{1}{\sqrt{3}} [1/6 + 2] + \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\frac{9}{2} - \frac{1}{2} \right] = 1/8 + \frac{1}{12} \left[\frac{9-25}{100} \right]$$

پس داریم:

$$= 1/8 + \frac{1}{12} \left[-\frac{16}{100} \right] = 1/8 - \frac{1}{75}$$

که تقریباً برابر با $1/79$ می‌شود.

توضیح: سؤال فی‌نفسه سؤال راحتی از این نوع طیف سوالات بود، چون به روش جبری حتی نیاز به استفاده از گسترش توابع f^* و G^* هم نداشتیم. اما محاسبات اعشاری آن کمی جالب نبود!

۲- گزینه «۴» در مثال متن کتاب، بخش توابع هذلولی مختلط ثابت کردیم که $|\sin z|$ برابر با $\sqrt{\sin^2 x + \sinh^2 y}$ است. می‌توانید اندازه $\sin z$ را از

$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

رابطه‌ی زیر حساب کنید:

پس $|\sin z|$ قطعاً بزرگ‌تر یا مساوی $\sinh y$ است؛ چون حداقل $\sin^2 x$ صفر است، از طرفی می‌توان نوشت:

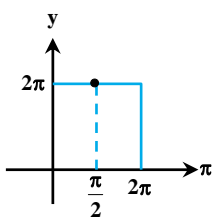
$$|\sin z| = \sqrt{1 - \cos^2 x + \cosh^2 y - 1} = \sqrt{\cosh^2 y - \cos^2 x}$$

چون حداقل $\cos^2 x$ صفر است، پس حداکثر $\sin z$ هم برابر با $\cosh y$ است. ماکزیمم $\cosh z$ در ناحیه مشخص شده

برابر با $\cosh 2\pi$ است. در واقع ماکزیمم روی مرز اتفاق و در نقطه‌ی $(x, y) = (\frac{\pi}{2}, 2\pi)$ می‌افتد. البته در صورت تسلط بر

روی اصل ماکزیمم و کمی تجربه به راحتی می‌شود با توجه به شکل مقابل گفت؛ ماکزیمم در نقطه‌ی $(x, y) = (\frac{\pi}{2}, 2\pi)$

رخ می‌دهد و با توجه به رابطه‌ی $\sin z$ به وضوح $\text{Max} |\sin z| = \cosh 2\pi$ است.





۳- گزینه «۴» از سؤالاتی است که سابقه طرح در آزمون‌های تستی را ندارد! البته همه می‌دانیم روش رد گزینه اکثر اوقات یاریگر ما در روبه‌رو شدن با سؤالات اینچنینی است. ابتدا روش تشریحی سؤال را ارائه می‌دهیم. با توجه به این که عامل ناهمگنی برابر با $\frac{\sin \theta}{r^2}$ می‌باشد، بنابراین معادله پواسون که همان معادله لاپلاس ناهمگن است به فرم زیر تبدیل می‌گردد:

بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0 \\ u(r, 0) = 0 \\ u(r, \theta) = \sin \theta + \sin 3\theta \end{cases}$$

می‌دانیم که معادله لاپلاس روی یک دیسک مثلاً در این سؤال $0 < \theta < 2\pi$ یا $0 < r < 2$ دارای جوابی به صورت زیر می‌باشد: (در متن کتاب مطرح شده است)

$$u(r, \theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)$$

حال با در نظر گرفتن شرط $u(r, 0) = 0$ خواهیم داشت $A_n = 0$ (برای $n = 0, 1, 2, 3$). همچنین مطابق با شرط $u(r, \theta) = \sin \theta + \sin 3\theta$ ضرایب $B_1 = \frac{1}{2}$ و $B_3 = \frac{1}{8}$ به دست می‌آیند. در نتیجه داریم:

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2}r \sin \theta + \frac{1}{8}r^3 \sin 3\theta$$

در نهایت با جایگزینی به دست می‌آوریم:

$$u(r, \theta) = u(r, \theta) - \sin \theta = \frac{1}{2}r \sin \theta + \frac{1}{8}r^3 \sin 3\theta - \sin \theta = \left(\frac{1}{2}r - 1\right) \sin \theta + \frac{1}{8}r^3 \sin 3\theta$$

روش رد گزینه: با توجه به شرایط مرزی اگر به جای r عدد ۲ قرار بدیم باید به $\sin 3\theta$ برسیم، به وضوح گزینه (۴) تو این شرایط صدق می‌کند!!

۴- گزینه «۳» سؤال بسیار پرتکرار و نسبتاً ساده است. با توجه به این که تابع زوج است، پس تبدیل فوریه کسینوسی باید مورد استفاده قرار بگیرد:

$$I = F_c(\omega) = \int_0^{\infty} |\sin x| \cos \omega x dx = \int_0^{\pi} \sin x \cos \omega x dx$$

با استفاده از روش انتگرال گیری جزءبه‌جزء داریم:

چون مشتق صفر نمی‌شود، لذا در مرحله سوم انتگرال می‌گیریم:

مشتق	انتگرال
$\oplus \cos \omega x$	$\sin x$
$\ominus -\omega \sin \omega x$	$-\cos x$
$\oplus -\omega^2 \cos \omega x$	$-\sin x$

$$I = -[\cos x \cos \omega x]_0^{\pi} - [\omega \sin x \sin \omega x]_0^{\pi} + \omega^2 I$$

$$\Rightarrow (1 - \omega^2) I = 1 + \cos \pi \omega \Rightarrow I = F_c(\omega) = \frac{1 + \cos \pi \omega}{1 - \omega^2} \Rightarrow f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1 + \cos \pi x}{1 - \omega^2} \cos \omega x dx$$

۵- گزینه «۱» سؤال را می‌توان به دو روش حل کرد:

روش اول: از قضیه مانده‌ها کمک می‌گیریم، دقت کنید طبق توضیحات صفحه ۲۸۲ کتاب ریاضی مهندسی مدرس‌ان شریف، چون حول مانده یک گردش کامل نداریم، به جای $2\pi i$ باید حاصل انتگرال در πi ضرب شود.

$$I(r) = \pi i \operatorname{Res}_{z=0} \frac{e^{iz}}{z} = \pi i \left[\frac{e^{iz}}{1} \right]_{z=0} = \pi i$$

که $|I(r)| = \pi$ می‌شود. اما عجله نکنید! برای انتخاب گزینه (۳)، چون $r \rightarrow \infty$ داده شده و منحنی C به صورت $|z| = \infty$ است، یعنی مانده در بی‌نهایت هم باید حساب شود. می‌دانیم مقدار مانده در بی‌نهایت قرینه‌ی مجموع مانده‌ها در نقاط تکین است، یعنی مانده در بی‌نهایت برابر با -1 است و لذا حاصل انتگرال صفر است.

$$\left| \int_C \frac{e^{iz}}{z} dz \right| \leq \int_{z=re^{i\theta}} \frac{|e^{iz}|}{|z|} |dz| = \int_0^{\pi} \frac{\pi e^{-r \sin \theta}}{r} r d\theta$$

روش دوم: طبق لم جردن داریم:

برای $r \rightarrow \infty$ حد بالا صفر است.



۶- گزینه «۱» سؤال ساده‌ای است! طراح خودش به وضوح استفاده از تبدیل لاپلاس را پیشنهاد داده است. ابتدا دقت کنید که داریم:

$$L[u_t(x, t)] = su(x, s) - u(x, 0)$$

در این سؤال طراح به جای $u(x, s)$ خواسته است که $v(x, s)$ بنویسیم! اشکال ندارد فقط یک نماد است و برای ما هم فرقی ندارد. در ادامه داریم:

$$sv(x, s) - u(x, 0) - 4v''(x, s) = 3v(x, s) \Rightarrow 4v''(x, s) + (3-s)v(x, s) = e^{-x}$$

۷- گزینه «۲» ابتدا از طرفین رابطه‌ی $u(x, t) = v(x, t) + r(x)$ دو بار نسبت به x و در یک مرحله‌ی دیگر یک‌بار نسبت به t مشتق می‌گیریم و داریم:

$$u_{xx} = v_{xx} + r_{xx}, \quad u_t(x, t) = v_t(x, t) + 0$$

حالا در معادله جایگزین می‌کنیم:

$$v_{xx} + r_{xx} = v_t(x, t) + x - 1$$

بر اساس دو شرط اولیه صورت سؤال داریم:

$$u(0, t) = v(0, t) + r(0) \Rightarrow 3 = v(0, t) + r(0)$$

$$u(2, t) = v(2, t) + r(2) \Rightarrow -1 = v(2, t) + r(2)$$

برای این که شرایط مرزی برحسب v همگن شود باید $r(0) = 3$ و $r(2) = -1$ شود، بنابراین با دستگاه معادلات زیر برای همگن شدن معادله و شرایط مرزی آن روبه‌رو هستیم:

$$\begin{cases} r_{xx} = x - 1 \Rightarrow r_x = \frac{x^2}{2} - x + c_1 \Rightarrow r(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + c_1x + c_2 \\ r(0) = 3, r(2) = -1 \end{cases}$$

حالا از شرط $r(0) = 3$ به راحتی c_2 برابر با 3 به دست می‌آید و از شرط $r(2) = -1$ داریم:

$$-1 = \frac{2^3}{6} - \frac{2^2}{2} + c_1(2) + 3 \Rightarrow -4 = \frac{4}{3} - 2 + 2c_1 \Rightarrow 2c_1 = -2 - \frac{4}{3} \Rightarrow c_1 = -\frac{5}{3}$$

$$r(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} - \frac{5}{3}x + 3$$

ما دنبال $v(x, 0)$ هستیم. اگر دوباره به تغییر متغیر صورت سؤال برگردیم، رابطه‌ی مقابل را داریم:

$$\Rightarrow 1 - x^3 = v(x, 0) + \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} - \frac{5}{3}x + 3 \Rightarrow v(x, 0) = -\frac{7}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{3}x - 2$$

$$u(x, t) = v(x, t) + r(x) \quad (*)$$

روش تستی: خُب از شرط صورت سؤال داریم:

با توجه به داده‌های دیگر دو شرط $u(0, t) = 3$ و $u(2, t) = -1$ داریم، پس از این دو شرط فعلاً کمک می‌گیریم:

$$\begin{cases} u(0, t) = v(0, t) + r(0) \Rightarrow 3 = v(0, t) + r(0) \\ u(2, t) = v(2, t) + r(2) \Rightarrow -1 = v(2, t) + r(2) \end{cases}$$

چون قراره معادله برحسب v یک معادله‌ی همگن با شرایط مرزی همگن باشه، پس باید $v(0, t) = v(2, t) = 0$ باشه، بنابراین $r(0) = 3$ و $r(2) = -1$ نتیجه‌ای که تا اینجا داریم. دنبال $v(x, 0)$ هستیم؛ در رابطه‌ی (*) به جای t ها صفر قرار می‌دیم:

$$u(x, 0) = v(x, 0) + r(x) \Rightarrow v(x, 0) = u(x, 0) - r(x) \Rightarrow \boxed{v(x, 0) = 1 - x^3 - r(x)}$$

اگر در طرفین رابطه‌ی فوق به جای x ها عدد صفر رو قرار بدیم، داریم:

تو گزینه‌ها فقط گزینه‌های (۱) و (۲) هستن که اگه به جای x های اونا صفر قرار بدیم، مقدارشون برابر منفی (۲) میشه، پس تا اینجا گزینه‌های (۳) و (۴) میبین!

حالا برای انتخاب از بین گزینه‌های (۱) و (۲) از شرط $r(2) = -1$ کمک می‌گیریم:

کافیه از بین گزینه‌های (۱) و (۲) تو یکی به جای x عدد ۲ قرار بدیم، مثلاً در گزینه (۲) داریم:

$$v(2, 0) = -\frac{7}{6}(2^3) + \frac{1}{2}(2)^2 + \frac{5}{3} \times 2 - 2 = -\frac{7 \times 4}{3} + 2 + \frac{10}{3} - 2 = \frac{-28 + 6 + 10 - 6}{3} = -\frac{18}{3} = -6$$

پس همین گزینه جوابه میتونین تو گزینه (۱) به جای x ، عدد ۲ رو قرار بدین و ببینین که برابر با ۶- نمیشه! (اگه این کارو هم میکردین باز هم

می‌تونستین بدون محاسبه‌ی گزینه (۲)، به جواب برسین فرقی نداره!)

۸- گزینه «۳» از سوالات تکراری که چند بار تاکنون عین آن طرح شده است! یک روش این است که به جای y ها، صفر و به جای x ها، Z قرار دهیم و مستقیم به ضابطه‌ی Z برسیم و روش دیگر مبتنی بر فرمول زیر است:

$$v = \int \frac{\partial u}{\partial x} dy - \int \frac{\partial u}{\partial y} dx \text{ (عبارتی که از حذف توابع شامل } y \text{ در ضابطه‌ی } \frac{\partial u}{\partial y} \text{ حاصل می‌شود)}$$

$$v = \int [\nu(x^2 - y^2 + 1)(2x) - \lambda xy^2] dy - \int (0) dx = \frac{\nu}{3} x^3 y - \frac{y^3}{3} \times 2x + \lambda xy - \frac{\lambda xy^3}{3} + c = \frac{\nu}{3} x^3 y - \frac{2xy^3}{3} + \lambda xy + c$$

$$\Rightarrow v(x, y) = \frac{\nu}{3} xy(x^2 - y^2 + 1) + c \xrightarrow{v(0,0)=0} c = 0 \Rightarrow v(x, y) = \frac{\nu}{3} xy(x^2 - y^2 + 1) \Rightarrow v(1, 1) = \frac{\nu}{3}$$

روش دیگر: وقتی u را داریم می‌توانیم از فرمول مقابل به Z و بعد از آن به v برسیم.

در ضابطه‌ی $u(x, y)$ به جای تمام x ها Z و به جای تمام y ها صفر قرار می‌دهیم:

با توجه به این که $v(0, 0) = 0$ ، پس $f(0) = 1$ و با توجه به ضابطه‌ی u قطعاً $v(z, 0) = 0$ خواهد بود، لذا $f(z) = (z^2 + 1)^2$. از این جا داریم:

$$f(z) = (z^2 + 1)^2 = (x^2 - y^2 + 1 + i2xy)^2 = v(x, y) + i\frac{\nu}{3} xy(x^2 - y^2 + 1) \Rightarrow v(x, y) = \frac{\nu}{3} xy(x^2 - y^2 + 1) \Rightarrow v(1, 1) = \frac{\nu}{3}$$

$$F_s(\omega) = \int_0^{\infty} \frac{x}{x^2 + 4} \sin \omega x dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin \omega x}{x^2 + 4} dx = I \quad \text{۹- گزینه «۱» به راحتی با استفاده از فرمول داریم:}$$

دقت کنید برای این بازه‌ی انتگرال را به صورت $\int_{-\infty}^{+\infty}$ نوشتیم تا از روش محاسبه‌ی انتگرال‌های حقیقی به کمک قضیه مانده‌ها کمک بگیریم. همان‌طور که در متن کتاب گفته‌ایم، داریم:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin ax dx = \text{Im}[\nu \pi i \text{ در } f(z)e^{iaz} \text{ تابع } f(z) \text{ در قطب‌هایی که بالای محور حقیقی قرار دارند}]$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2} \text{Im}[\nu \pi i \text{ Res}_{z=2i} \frac{ze^{i\omega z}}{z^2 + 4}]$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2} \text{Im}[\nu \pi i \frac{ze^{i\omega z}}{2z}]_{z=2i} = \frac{\pi}{2} e^{-2\omega} \quad \text{دقت کنید که } z = 2i \text{ قطب ساده درون ناحیه (نیم‌صفحه‌ی فوقانی) است، لذا داریم:}$$

۱۰- گزینه «۲» سؤال بسیار تکراری از سری فوریه است و اساساً جنبه‌ی محاسباتی دارد. سؤال را به دو روش حل می‌کنیم، روش اول، روش تشریحی و عادی حل سؤال است:

با توجه به اینکه سری فوریه سینوسی مدنظر است، لذا باید b_n را حساب کنیم:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi - x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi x) \sin(nx) dx + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} -x^2 \sin(nx) dx = 2 \int_0^{\pi} x \sin(nx) dx - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \sin(nx) dx = I_1 - I_2$$

دو انتگرال جزء به جزء داریم که از روش جدول برای هر دوی آن‌ها کمک می‌گیریم:

	x	$\sin nx$	
\oplus	\swarrow	\searrow	\rightarrow
	1	$-\frac{1}{n} \cos(nx)$	$\Rightarrow I_1 = 2 \left[-\frac{x}{n} \cos nx + \frac{1}{n} \sin nx \right]_0^{\pi} = 2 \times \left[-\frac{\pi}{n} \cos(n\pi) \right] = -\frac{2\pi}{n} \cos n\pi$
\ominus	\swarrow	$-\frac{1}{n^2} \sin nx$	

برای محاسبه I_2 داریم:

	x^2	$\sin nx$	
\oplus	\swarrow	\searrow	\rightarrow
	$2x$	$-\frac{1}{n} \cos(nx)$	$\Rightarrow I_2 = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{x^2}{n} \cos(nx) + \frac{2x}{n^2} \sin(nx) + \frac{2}{n^2} \cos(nx) \right]_0^{\pi} \Rightarrow I_2 = \frac{2}{\pi} \left[\left(-\frac{\pi^2}{n} \cos(n\pi) + \frac{2}{n^2} \cos n\pi - \frac{2}{n^2} \cos(0) \right) \right]$
\ominus	\swarrow	$-\frac{1}{n^2} \sin(nx)$	
\oplus	\swarrow	$+\frac{1}{n^3} \cos(nx)$	$\Rightarrow I_2 = -\frac{2\pi}{n} \cos n\pi + \frac{4}{\pi n^3} \cos(n\pi) - \frac{4}{\pi n^3}$



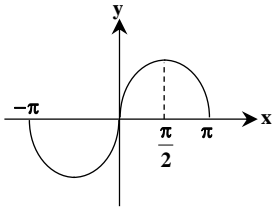
بنابراین $b_n = I_1 - I_2 = I_1 - I_2$ برابر با مقدار مقابل است:

$$b_n = I_1 - I_2 = -\frac{4}{\pi n^2} \cos n\pi + \frac{4}{\pi n^2}$$

اگر n زوج باشد، آنگاه $\cos n\pi = 1$ و لذا $b_n = 0$ می‌شود و اگر n فرد باشد (یعنی $n = 2m + 1$) آنگاه داریم:

$$b_n = -\frac{4(-1)}{\pi(2m+1)^2} + \frac{4}{\pi(2m+1)^2} = \frac{8}{(2m+1)^2 \pi}$$

همان‌طور که می‌بینید b_n به‌دست آمده همان b_n داده شده در گزینه (۲) می‌باشد.



روش دوم: دقت کنید، چون تابع پیوسته هستش، پس قطعاً سرعت رشد ضریب از درجه یک نیست و این یعنی گزینه‌های (۱) و (۳) غلطن. از بین گزینه‌های (۲) و (۴) باید یکی رو انتخاب کنیم. هم از بحث تقارن می‌تونیم برای حذف کمک بگیریم و هم از روش مقدارگذاری؛ چون روش مقدارگذاری اطلاعاتی در حد دبیرستان نیاز داره، پس از اون کمک می‌گیریم:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}$$

برای مقدارگذاری می‌تونیم $x = \frac{\pi}{2}$ در نظر بگیریم:

با فرض $\pi^2 = 10$ ، $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2.5$ هستش، پس واضحه که گزینه (۴) غلطه، چون به ازای $x = \frac{\pi}{2}$ ، $\sin 2mx = \sin x\pi = 0$ میشه.

۱۱- گزینه «۲» ابتدا توجه کنید که تبدیل فوریه $u(x, t)$ را با $u(\omega, t)$ و تبدیل فوریه u_{xx} برابر با $(i\omega)^2 u(\omega, t)$ است. حالا از طرفین معادله تبدیل فوریه

می‌گیریم، $\frac{du(\omega, t)}{dt} - a^2[-\omega^2 u(\omega, t)] = F(\omega, t)$ با یک معادله‌ی خطی مرتبه اول روبه‌رو هستیم:

$$u(\omega, t) = e^{-a^2 \omega^2 t} \left[\int_0^t F(\omega, \tau) e^{+a^2 \omega^2 \tau} d\tau + C(\omega) \right]$$

$$u(\omega, 0) = 0 \Rightarrow C(\omega) = 0 \Rightarrow u(\omega, t) = \int_0^t F(\omega, \tau) e^{-a^2 \omega^2 (t-\tau)} d\tau$$

۱۲- گزینه «۴» از سؤالاتی که در دو سال اخیر مورد توجه طراحان قرار گرفته است. سؤال مبتنی بر قضیه لیوویل طراحی شده است. چون سمت چپ

$$f(z) - 2z^2 - iz = c \Rightarrow f(z) = c + 2z^2 + iz \Rightarrow f\left(\frac{1}{z}\right) = c + \frac{2}{z^2} + \frac{i}{z}$$

نامساوی $|f(z) - 2z^2 - iz| \leq \sqrt{2}$ همه جا تحلیلی است، لذا داریم:

$$I = \oint_{|z|=1} f\left(\frac{1}{z}\right) dz = \oint_{|z|=1} cdz + \oint_{|z|=1} \frac{2}{z^2} dz + i \oint_{|z|=1} \frac{1}{z} dz \Rightarrow I = 0 + 0 + i \times 2\pi i = -2\pi$$

حالا سراغ محاسبه‌ی انتگرال می‌رویم:

دقت کنید بر طبق انتگرال کوشی یعنی $\oint_C \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz = 2\pi i \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ برای انتگرال‌های فوق، حاصل دو انتگرال صفر است و حاصل انتگرال دیگر برابر $2\pi i f^{(0)}(0) = 2\pi i \times 1 = 2\pi i$ می‌شود که با ضرب در i شده، مقدار آن برابر با -2π شد.

۱۳- گزینه «۱» یک سؤال بسیار پرتکرار و نسبتاً ساده از نگاهت $w = \frac{1}{z}$ طرح شده است. می‌دانیم تحت نگاشت $w = \frac{1}{z}$ ، رابطه‌های $y = \frac{-v}{u^2 + v^2}$ و $x = \frac{u}{u^2 + v^2}$

را داریم و چون $2x + 3y = 5$ ، لذا با جایگذاری داریم:

$$\frac{2u}{u^2 + v^2} - \frac{3v}{u^2 + v^2} = 5 \xrightarrow{\text{طرفین ضرب در } u^2 + v^2} 2u - 3v = 5u^2 + 5v^2 \Rightarrow 5u^2 - 2u + 5v^2 + 3v = 0$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر } 5} u^2 - \frac{2}{5}u + v^2 + \frac{3}{5}v = 0$$

حالا با اضافه و کم کردن اعداد مناسب سعی می‌کنیم متغیرهای u و v را به صورت مربع کامل بنویسیم:

$$\left[u^2 - \frac{2}{5}u + \left(\frac{1}{5}\right)^2 - \left(\frac{1}{5}\right)^2\right] + \left[v^2 + \frac{3}{5}v + \left(\frac{3}{10}\right)^2 - \left(\frac{3}{10}\right)^2\right] = 0 \Rightarrow \left(u - \frac{1}{5}\right)^2 - \frac{1}{25} + \left(v + \frac{3}{10}\right)^2 - \frac{9}{100} = 0 \Rightarrow \left(u - \frac{1}{5}\right)^2 + \left(v + \frac{3}{10}\right)^2 = \frac{13}{100}$$



۱۴- هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیستند. سؤال فوق‌العاده غیر استاندارد می‌باشد و نه تنها در کتاب‌های کنکوری چنین سؤالاتی وجود ندارد، بلکه در کتاب‌های دانشگاهی و سؤالات پایان ترم هم چنین سؤالاتی طرح نمی‌شود. ظاهراً بحث فقط برای این بوده که کسی سؤال را جواب ندهد و ضمناً گزینه‌ها هم غلط هستند و سؤال باید حذف شود.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \eta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \begin{cases} te^{-x+y} & 0 < x < 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases} = f(x, y, t)$$

تبدیل فوریه کلی روی y :

$$F(u(x, y, t)) = \hat{u}(x, \omega, t)$$

$$F\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = (-i\omega)^2 \hat{u}(x, \omega, t) = -\omega^2 \hat{u}(x, \omega, t)$$

$$\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2} - \eta \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} + \eta \omega^2 \hat{u} = \hat{f}(x, \omega, t)$$

تبدیل فوریه سینوسی روی x :

$$F_s(\hat{u}(x, \omega, t)) = \tilde{u}(m, \omega, t)$$

$$F_s\left(\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2}\right) = \frac{\eta}{\pi} m \hat{u}(m, \omega, t) - m^2 \tilde{u} = -m^2 \tilde{u}$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} + \eta m^2 \tilde{u} + \eta \omega^2 \tilde{u} = \tilde{f}(x, \omega, t) \Rightarrow \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} + \tilde{u} \eta (m^2 + \omega^2) = \tilde{f}(x, \omega, t)$$

$$f(x, y, t) = te^{-x+y} \Rightarrow \hat{f} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega y} f(x, y, t) dy$$

$$\hat{f} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 te^{-x+y} e^{i\omega y} dy = \frac{t}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 e^{-x-y+i\omega y} dy = \frac{te^{-x}}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{-1+i\omega} e^{y(i\omega-1)} \Big|_0^1 \right) = \frac{te^{-x}}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{i\omega-1} \right) (e^{i\omega-1} - 1)$$

$$\Rightarrow \tilde{f} = \frac{\eta}{\pi} \int_0^{\infty} \hat{f} \sin m x dx = \frac{\eta}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{te^{-x}}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{i\omega-1} \right) (e^{i\omega-1} - 1) \sin m x dx$$

$$= \frac{t}{\pi} \left(\frac{1}{i\omega-1} \right) (e^{i\omega-1} - 1) \int_0^{\infty} e^{-x} \sin m x dx = F(m, \omega) t + G(m, \omega)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} + \eta (m^2 + \omega^2) \tilde{u} = f(m, \omega) t$$

پس برای معادله داریم:

پس برای جواب \tilde{u} داریم:

$$\text{جواب عمومی } \tilde{u}_n = A_{m,\omega} \cos \sqrt{\eta(m^2 + \omega^2)} t + B_{m,\omega} \sin \sqrt{\eta(m^2 + \omega^2)} t$$

$$\text{جواب خصوصی } \tilde{u}_p = C_{m,\omega} t + D_{m,\omega}$$

$$\Rightarrow \tilde{u} = \tilde{u}_n + \tilde{u}_p = A_{m,\omega} \cos \sqrt{\eta(m^2 + \omega^2)} t + B_{m,\omega} \sin \sqrt{\eta(m^2 + \omega^2)} t + C_{m,\omega} t + D_{m,\omega}$$

اکنون جواب را به صورت $u(x, y, t)$ به دست می‌آوریم.

$$F_s^{-1}\{\tilde{u}(m, \omega, t)\} = \hat{u}(x, \omega, t) = \int_0^{\infty} \tilde{u} \sin m x dm$$

تبدیل معکوس کلی:

$$F^{-1}\{\hat{u}(x, \omega, t)\} = u(x, y, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(x, \omega, t) e^{i\omega y} d\omega$$

$$\Rightarrow u(x, y, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} (A_{m,\omega} \cos \sqrt{\eta(m^2 + \omega^2)} t + B_{m,\omega} \sin \sqrt{\eta(m^2 + \omega^2)} t + C_{m,\omega} t + D_{m,\omega}) \times \sin m x e^{i\omega y} dm d\omega$$

تذکر مهم: در حالت کلی اگر بخواهیم با روش حذف گزینه سؤال را حل کنیم، گزینه چهار گزینه منطقی‌تری می‌باشد نسبت به بقیه. هر چند تمام گزینه‌ها غلط هستند. برای مثال متغیرهای انتگرال‌گیری در طرف دوم گزینه‌ها x و y نوشته شده است و این غلط است. پارامترهایی که نسبت به آنها انتگرال گرفته می‌شوند، پارامتر مربوط به انتگرال فوریه مثل m می‌باشند. جنس طرف اول گزینه‌ها با طرف دوم یکی نیست و این ایراد اساسی جواب‌هاست. حل صحیح در بالا نوشته شده است.



۱۵- گزینه «۳» از سوالات نسبتاً ساده این آزمون! اگر فرض کنیم تبدیل فوریه $y(x)$ برابر با $Y(\omega)$ است، آنگاه تبدیل فوریه y' برابر با $i\omega Y(\omega)$ و تبدیل فوریه y'' برابر با $- \omega^2 Y(\omega)$ است. لذا معادله‌ی زیر را داریم:

$$[(i\omega)^2 - 4(i\omega) + 3] Y(\omega) = \frac{2 \sin \omega}{\omega} \Rightarrow -\omega^2 Y(\omega) - 4i\omega Y(\omega) + 3 Y(\omega) = \frac{2 \sin \omega}{\omega}$$

$$Y(\omega) = \frac{-2 \sin(\omega)}{\omega(\omega^2 + 4i\omega - 3)}$$

بنابراین داریم:

توضیح: دقت کنید که تبدیل فوریه عبارت سمت راست به صورت زیر حساب می‌شود:

$$\text{تبدیل فوریه عبارت سمت راست} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx = 2 \int_0^{\infty} f(x) \cos(\omega x) dx = 2 \int_0^1 1 \times \cos(\omega x) dx = \frac{2 \sin \omega}{\omega}$$

دقت کنید چون تابع $f(x)$ زوج است، لذا حاصل قسمت سینوسی صفر است و فقط تبدیل کسینوسی داریم.

۴۱- گزینه «۳» اگر متغیر تصادفی X را تعداد آزمایشات تا به T امین موفقیت (در این سؤال سومین بار خط) در نظر بگیریم، آنگاه متغیر تصادفی X دارای توزیع دوجمله‌ای منفی (پاسکال) می‌باشد و

$$EX = \frac{r}{P} = \frac{3}{\frac{1}{2}} = 6$$

۴۲- گزینه «۴» یکی از ارقام سه‌رقمی ۱۰۰ تا ۹۹۹ می‌بایست بزرگ‌تر از شش باشد، بنابراین یا رقم صدگان بزرگ‌تر از ۶ می‌باشد یا رقم دهگان و یا رقم یکان. احتمال اینکه رقم صدگان بزرگ‌تر از ۶ باشد (یعنی ۷، ۸، و ۹ باشد) بنابراین:

$$\frac{3}{9} \times \frac{7}{10} \times \frac{7}{10}$$

می‌باشد، زیرا ۳ رقم از ۹ رقم برای صدگان انتخاب می‌شود (یعنی ۷، ۸، ۹) و رقم یکان و دهگان از بین اعداد ۰، ۱، ۰، ۱، ۰، ۰، ۰، ۰، ۰، ۰ انتخاب می‌شود. حال اگر رقم دهگان فقط بزرگ‌تر از ۶ باشد آنگاه احتمال مورد نظر برابر $\frac{6}{9} \times \frac{3}{10} \times \frac{7}{10}$ می‌باشد.

و همین‌طور برای رقم یکان $\frac{6}{9} \times \frac{7}{10} \times \frac{3}{10}$ خواهد بود و بنابراین با جمع احتمالات فوق به مقدار ۰/۴۴ خواهیم رسید.

۴۳- گزینه «۱» ابتدا می‌دانیم که $E\{Z - W\} = EZ - EW$ بنابراین یکایک امید ریاضی‌ها را به دست می‌آوریم. قبل از محاسبه امید ریاضی می‌بایست تابع چگالی Z و W را داشته باشیم.

$$F_Z(z) = P(\max(X, Y) \leq z) = P(X \leq z, Y \leq z)$$

$$= P(X \leq z)P(Y \leq z) = z^2, \quad 0 < z < 1$$

$$F_W(w) = P(\min(X, Y) \leq w) = 1 - P(\min(X, Y) > w)$$

$$= 1 - (1 - P(X < w))(1 - P(Y < w))$$

$$= 1 - (1 - w)^2$$

$$\Rightarrow f_Z(z) = \frac{\partial F_Z(z)}{\partial z} = 2z \quad 0 < z < 1$$

$$\Rightarrow f_W(w) = \frac{\partial F_W(w)}{\partial w} = 2(1 - w) \quad 0 < w < 1$$

$$\Rightarrow EZ = \int_0^1 z(2z)dz = \frac{2}{3}, \quad EW = \int_0^1 2w(1 - w)dw = 2 \frac{\Gamma(2)\Gamma(2)}{\Gamma(4)} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow E\{Z - W\} = EZ - EW = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

پاسخنامه درس آمار رشته مهندسی برق ارشد ۹۸

۴۴- گزینه «۲» ابتدا مقدار A را محاسبه می‌کنیم. می‌دانیم که $\iint_{xy} f(x,y)dydx = 1$ بنابراین:

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} A dx dy = \frac{A}{2} \pi \Rightarrow \frac{A}{2} \pi = 1 \Rightarrow A = \frac{2}{\pi}$$

حال کوواریانس X و Y را محاسبه می‌نماییم که:

$$\text{COV}(X, Y) = \text{EXY} - \text{EXEY}$$

$$\Rightarrow \text{EXY} = \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2xy}{\pi} dy dx = \int_{-1}^1 \frac{xy^2}{\pi} \Big|_0^{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-1}^1 \frac{x(1-x^2)}{\pi} dx$$

از طرفی بازه انتگرال‌گیری مورد نظر متقارن و تابع انتگرالده، تابعی فرد می‌باشد، بنابراین انتگرال فوق برابر صفر می‌باشد. حال EX را محاسبه می‌کنیم.

$$\text{EX} = \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2x}{\pi} dy dx = \int_{-1}^1 \frac{2x}{\pi} \sqrt{1-x^2} dx$$

باز هم بازه مورد نظر انتگرال‌گیری متقارن و تابع انتگرالده فرد می‌باشد؛ بنابراین انتگرال مورد نظر برابر صفر می‌باشد و دیگر نیازی به محاسبه EY

نمی‌باشد، زیرا $\text{EX} = 0$

و در کل

$$\text{COV}(X, Y) = \text{EXY} - \text{EXEY} = 0$$

۴۵- گزینه «۴» می‌دانیم که $\text{EX}_1 = 1$ است، بنابراین براساس متغیر تصادفی Z ناریب عدد یک را می‌یابیم.

$$\text{EZ} = \text{EX}_1 + \text{EX}_2 + \text{EX}_3 + \text{EX}_4 = 4 \Rightarrow E\left(\frac{Z}{4}\right) = 1$$

البته با نگاهی به گزینه‌ها و بررسی آن‌ها متوجه خواهید شد که هیچ‌کدام ناریب صفر نمی‌باشند.