31. فرض کنید معادله دیفرانسیل $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ دارای عامل انتگرال‌ساز به صورت $\mu(z)$ با شرط $z = x^2 + xy$ باشد. $\frac{d\ln\mu}{dz}$ کدام است؟

1) $\dfrac{M_y - N_x}{(2x+y)N + xM}$

2) $\dfrac{M_y - N_x}{(2x+y)M + xN}$

3) $\dfrac{M_y - N_x}{(2x+y)N - xM}$

4) $\dfrac{M_y - N_x}{(2x+y)M - xN}$

$$\frac{M_y - N_x}{N Z_x - M Z_y} = \frac{M_y - N_x}{(2x+y)N - xM}$$

$$\mu(z) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{(2x+y)N - xM}dz} \longrightarrow \ln \mu(z) = \int \frac{M_y - N_x}{(2x+y)N - xM}dz$$

$$\frac{d\ln(\mu(z))}{dz} = \frac{M_y - N_x}{(2x+y)N - xM}$$

تذکر: هر چند در این مثال، در صورت تست هر چهار گزینه یکسان بوده و به راحتی می‌توان از همین ویژگی استفاده کرده و به راحتی و بدون هیچگونه حل تشریحی گزینه ۳ را انتخاب کرد. اما حل تشریحی این سوال مستلزم استفاده از (فرمول محاسبه فاکتور انتگرال در حالت کلی) می‌باشد و اگر نخواهیم از این فرمول نهایی استفاده کنیم، راه حل مثال بسیار طولانی‌تر خواهد شد.

۳۲- فرض کنید $y(x)$ سری مکلورن جواب معادلهٔ دیفرانسیل $(1-x^2)y''-2xy'+12y=0$ باشد. در این صورت اگر $\sum_{n=0}^{\infty} p_n(x)u^n=\frac{1}{\sqrt{1-2xu+u^2}}$ باشد، $y(x)$ کدام است؟

$$(1-x^2)y''-2xy'+3(3+1)y=0 \quad y=P_3(x)$$

نکته: معادلهٔ دیفرانسیل داده شده معروف به لژاندر می‌باشد. معمولاً در کلیه کتاب‌های درسی، جواب این معادله به صورت یک فرمول نهایی تحت عنوان تابع لژاندر بیان می‌شود. چنانچه نخواهیم از این فرمول نهایی استفاده کنیم، حل سوال بسیار طولانی‌تر خواهد شد.

۱) $p_3(x)$
۲) $p_4(x)$
۳) $p_1(x)$
۴) $p_2(x)$

۳۳- دستگاه معادلات دیفرانسیلی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} x'(t)-4y''(t)=\begin{cases}1 & 0\le t<1\\ 0 & t\ge 1\end{cases}\\ y''(t)-3x(t)=1\\ x(0)=y(0)=y'(0)=0\end{cases}$$

$$x'(t)-4(3x(t)+1)=\begin{cases}1 & 0\le t<1\\ 0 & t\ge 1\end{cases}$$

$$x'(t)-12x(t)=\begin{cases}5 & 0\le t<1\\ 4 & t\ge 1\end{cases} \rightsquigarrow sX-12X=\frac{5}{s}-\frac{e^{-s}}{s}$$

$$X=\frac{5-e^{-s}}{s(s-12)}=\frac{1}{12}\left(\frac{5-e^{-s}}{s-12}-\frac{5-e^{-s}}{s}\right)$$

$x(2)$ کدام است؟

$$x(t)=\frac{1}{12}\left\{5e^{12t}u(t)-e^{12(t-1)}u(t-1)-5u(t)+u(t-1)\right\}$$

$$x(2)=\frac{1}{12}\left(5e^{24}-e^{12}-4\right)$$

معمولاً تبدیل لاپلاس برخی از توابع مهم به صورت جدول فرمول ارائه می‌شود.

۱) $\frac{1}{12}(5e^{24}+e^{12}-6)$
۲) $\frac{1}{12}(5e^{12}+e^{24}-6)$
۳) $\frac{1}{2}(e^{12}-1)$
۴) $\frac{5}{12}(e^{24}-1)$

۳۴- مسیرهای قائم بر منحنی‌های $x^2+\frac{y^2}{c^2}=1$ که در آن $c\neq 0$ پارامتر ثابت حقیقی است، کدام است؟

$$\begin{cases}x^2+\frac{y^2}{c^2}=1\\ 2x+\frac{2yy'}{c^2}=0\end{cases} \xrightarrow{\text{حذف } c^2} 2x+\frac{2yy'(1-x^2)}{y^2}=0 \quad y'\to-\frac{1}{y'}$$

$$2x-\frac{2(1-x^2)}{y'y}=0 \rightsquigarrow y'y=\frac{1}{x}-x$$

$$\frac{y^2}{2}+\frac{x^2}{2}=\ln(cx)$$

۱) $x^2+y^2=c-x$
۲) $\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2=\ln(cx)$
۳) $x^2+y^2=\ln(cx)$
۴) $\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2=x+c$

۳۵- رونسکین دو جواب مستقل خطی معادلهٔ دیفرانسیل $xy''-(1+x)y'+(\sin x)y=0\ ,\ x>0$، کدام است؟

$$y''\underbrace{-\frac{(1+x)}{x}}_{P(x)}y'+\frac{\sin x}{x}y=0$$

$$W=ce^{-\int P(x)dx}=ce^{\int\frac{1+x}{x}dx}=cxe^{x}$$

۱) $\frac{c}{x}e^{x}$
۲) $\frac{c}{x}e^{-x}$
۳) cxe^{x}
۴) cxe^{-x}

نکته: در کلیه کتاب‌های درسی و مراجع معتبر دنیا، رونسکین این دسته از معادلات به صورت فرمول اثبات شده فوق ارائه شده و اگر نخواهیم از این فرمول استفاده کنیم، راه حل مسئله بسیار طولانی‌تر خواهد شد.

۳۶- مسئلهٔ موج دو بعدی زیر را درون دایره واحد در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} u_{tt}(r,\theta,t)=9\nabla^2 u(r,\theta,t)\ , & 0<r<1, 0<\theta<2\pi, t>0 \\ u(r,\theta,0)=1\ , & 0\le r\le 1, 0\le\theta<2\pi \\ u_t(r,\theta,0)=0\ , & 0\le r\le 1, 0\le 2\pi \\ u(1,\theta,t)=0\ , & 0\le\theta<2\pi \end{cases}$$

$\rightarrow b_n=0$

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\lambda_n t\, J_0(\alpha_n r)$$

اگر $u(r,\theta,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\lambda_n t+b_n\sin\lambda_n t)J_0(\alpha_n r)$ جواب مسئله باشد، a_n و b_n کدام‌اند؟

۱) $b_n=0\ ,\ a_n=\dfrac{2}{J_0^2(\alpha_n)}\displaystyle\int_0^1 rJ_1(\alpha_n r)dr$

۲) $b_n=0\ ,\ a_n=\dfrac{2}{J_1^2(\alpha_n)}\displaystyle\int_0^1 rJ_0(\alpha_n r)dr$

۳) $b_n=\dfrac{2}{3\alpha_n J_0^2(\alpha_n)}\displaystyle\int_0^1 rJ_1(\alpha_n r)dr\ ,\ a_n=0$

۴) $b_n=\dfrac{2}{3\alpha_n J_1^2(\alpha_n)}\displaystyle\int_0^1 rJ_0(\alpha_n r)dr\ ,\ a_n=0$

$$u(r,\theta,0)=1 \rightarrow 1=\sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0(\alpha_n r)$$

$$a_n=\frac{2}{J_1^2(\alpha_n)}\int_0^1 r J_0(\alpha_n r)dr$$

بدون نیاز به حل تشریحی نیز می‌توان از همان ابتدا گزینه ۲ را انتخاب نمود.

۳۷- با استفاده از مقدار $\oint_{|z|=1}\frac{e^{az}}{z}dz$، حاصل $\int_0^{\pi}e^{a\cos\theta}\cos(a\sin\theta)d\theta$ کدام است؟

۱) $\frac{3\pi}{4}$

۲) π

۳) $\frac{\pi}{8}$

۴) $\frac{\pi}{2}$

$$\int_0^{\pi}e^{a\cos\theta}\cos(a\sin\theta)d\theta=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}e^{a\cos\theta}\cos(a\sin\theta)d\theta=\pi \quad ① , ②$$

$$|z|=1 \rightarrow z=1e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta,\quad dz=iz\,d\theta \rightarrow \oint\frac{e^{az}}{z}dz=2\pi i \quad ①$$

$$\oint\frac{e^{az}}{z}dz=\int_{-\pi}^{\pi}e^{a\cos\theta}[\cos(a\sin\theta)+i\sin(a\sin\theta)]\,i\,d\theta \quad ②$$

۳۸- فرض کنید $e^{-2\omega}$ ضریب انتگرال فوریهٔ سینوسی تابع $f(x)=\frac{x}{x^2+4}$ باشد. حاصل انتگرال $\int_0^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+4)^2}dx$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2}$

۲) 2π

۳) $\frac{1}{2\pi}$

۴) $\frac{2}{\pi}$

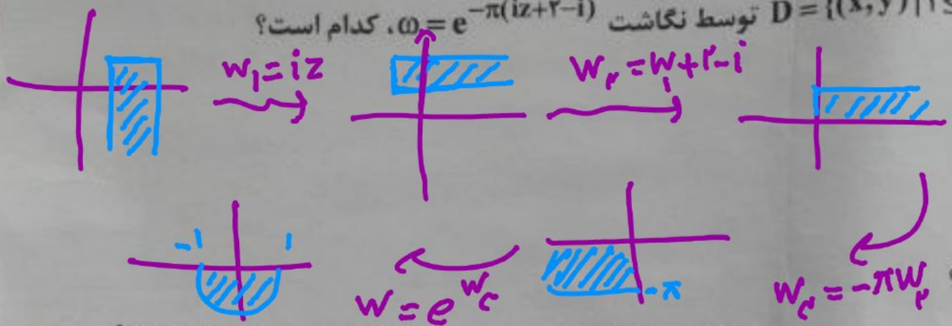
با استفاده از فرمول پارسوال می‌توان چنین نوشت:

$$\int_0^{\infty}\left[\frac{x}{(x^2+4)}\right]^2dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\pi^2(e^{-2\omega})^2d\omega=\frac{\pi}{8}$$

روش دوم: با استفاده از قضیه مانده‌ها می‌توان چنین نوشت:

$$\int_0^{\infty}\frac{x^2}{(4+x^2)^2}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(4+x^2)^2}dx=\frac{1}{2}\left[2\pi i\left(\operatorname{Res}_{z=2i}\frac{z^2}{(4+z^2)^2}\right)\right]=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{8}$$

۳۹- نقش تصویر ناحیهٔ $D=\{(x,y)\,|\,1\le x\le 2\,,\, y\le 2\}$ توسط نگاشت $\omega=e^{-\pi(iz+2-i)}$، کدام است؟



۱) $\{\omega\,|\,|\omega|\ge 1\,,\,\mathrm{Re}(\omega)\ge 0\}$

۲) $\{\omega\,|\,|\omega|\ge 1\,,\,\mathrm{Im}(\omega)\le 0\}$

۳) $\{\omega\,|\,|\omega|\le 1\,,\,\mathrm{Re}(\omega)\ge 0\}$

۴) $\{\omega\,|\,|\omega|\le 1\,,\,\mathrm{Im}(\omega)\le 0\}$

۴۰- جواب مسئلهٔ گرمای زیر کدام است؟

$$\begin{cases} u_t(x,t)=4u_{xx}(x,t)+2u(x,t)\,,\ 0<x<\pi\,,\ t>0\\ u(x,0)=f(x)\,,\quad 0\le x\le \pi\\ u(0,t)=u_x(\pi,t)=0\end{cases}$$

پایه مناسب $=\sin\frac{(2n-1)2\pi x}{4\pi}=\sin(\frac{2n-1}{2})x$

۱) $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{-(4n^2-4n-1)t}\sin(\frac{2n-1}{2})x\,,\ a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin(\frac{2n-1}{2})x\,dx$

$T'=-4(\frac{2n-1}{2})^2T+2T \rightsquigarrow T'=[-(2n-1)^2+2]T \rightsquigarrow \frac{T'}{T}=-(4n^2-4n-1)$

۲) $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{-(4n^2-4n-1)t}\cos(\frac{2n-1}{2})x\,,\ a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos(\frac{2n-1}{2})x\,dx$

$T=e^{-(4n^2-4n-1)t}$

۳) $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{-(4n^2-4n+3)t}\cos(\frac{2n-1}{2})x\,,\ a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos(\frac{2n-1}{2})x\,dx$

۴) $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{-(4n^2-4n+3)t}\sin(\frac{2n-1}{2})x\,,\ a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin(\frac{2n-1}{2})x\,dx$

۴۱- یک سکه با احتمال مساوی شیر و خط را به‌طور مستقل از هم آنقدر پرتاب می‌کنیم تا برای سومین بار خط مشاهده شود. به طور متوسط چند بار باید پرتاب را انجام دهیم، تا برای سومین بار خط مشاهده شود؟

۱) ۱۲

۲) ۱۶

۳) ۶

۴) ۸

توزیع دوجمله‌ای منفی با پارامتر $k=3$, $P=\frac{1}{2}$

$E[X]=\frac{k}{P}=6$

۴۲- از میان اعداد سه رقمی ۱۰۰ تا ۹۹۹ یک عدد به صورت تصادفی انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که تنها یک رقم از ارقام این عدد سه رقمی بزرگتر از ۶ باشد، چقدر است؟

۱) ۰/۴۹

۲) ۰/۶۲

۳) ۰/۳۴

۴) ۰/۴۴

$P(X_1>6\,,X_2\le 6\,,X_3\le 6)+P(X_1\le 6\,,X_2>6\,,X_3\le 6)$
$+P(X_1\le 6\,,X_2\le 6\,,X_3>6)=\frac{3}{9}\times\frac{7}{10}\times\frac{7}{10}+\frac{6}{9}\times\frac{3}{10}\times\frac{7}{10}$
$+\frac{6}{9}\times\frac{7}{10}\times\frac{3}{10}=\frac{147+126+126}{900}=\frac{399}{900}=0/44$

۴۳- فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی مستقل و هر کدام دارای توزیع یکنواخت در بازهٔ $[0,1]$ باشند. اگر $Z=\max\{X,Y\}$ و $W=\min\{X,Y\}$ باشد، مقدار $E\{Z-W\}$، کدام است؟

$$F_X(x)=\int_0^x \frac{1}{1}dx = x$$

$$F_Y(y)=\int_0^y \frac{1}{1}dy = y$$

$$\begin{cases} F_Z(z)=F_X(z)F_Y(z)=z^2 \rightsquigarrow f_Z(z)=2z \\ F_W(w)=1-(1-F_X(w))(1-F_X(w)) \\ \quad =1-(1-w)(1-w)=2w-w^2 \end{cases}$$

$$f_W(w)=2-2w$$

$$E[Z]=\int_0^1 z f_Z(z)dz=\frac{2}{3}$$

$$E[W]=\int_0^1 w f_W(w)dw=\frac{1}{3}$$

$$E[Z-W]=E[Z]-E[W]=\frac{1}{3}$$

۱) $\frac{1}{3}$

۲) $\frac{2}{3}$

۳) $\frac{1}{6}$

۴) $\frac{1}{2}$

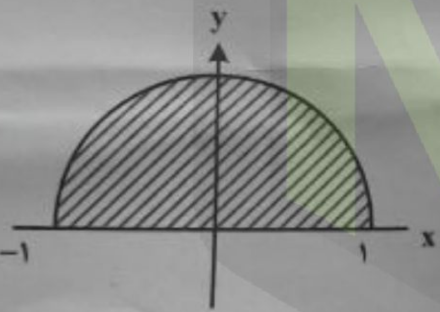
۴۴- تابع چگالی مشترک دو متغیر تصادفی X و Y به صورت زیر است، که A یک مقدار ثابت است. کوواریانس X و Y کدام است؟

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases} A & x^2+y^2\le 1 \\ & y\ge 0 \\ 0 & \text{سایر} \end{cases}$$

$$Cov(X,Y)=E[XY]-\cancel{E[X]}E[Y]$$

$$Cov(X,Y)=E[XY]=\int_0^1\int_{-1}^1 xy\, f(x,y)\,dx\,dy$$

$$=0$$



۱) $\frac{2}{\pi}$

۲) 0

۳) $-\frac{1}{\pi}$

۴) $-\frac{2}{\pi}$

۴۵- اگر X_1, X_2, X_3 و X_4 متغیرهای تصادفی مستقل از هم و هرکدام دارای تابع چگالی $f_X(x)=e^{-x}u(x)$ باشد، بهترین تخمین متغیر تصادفی X_1 برحسب مقدار مشاهده شدهٔ $Z=X_1+X_2+X_3+X_4$، با معیار حداقل میانگین مربع خطا کدام است؟

بهترین تخمین با معیار حداقل میانگین خطا بصورت میانگین X_1 و X_2 و X_3 و X_4

یعنی $\frac{X_1+X_2+X_3+X_4}{4} = \frac{Z}{4}$ می‌باشد.

۱) $\frac{Z^2}{4}$

۲) $\frac{e^{-Z}}{4}$

۳) $\frac{Z}{2}$

۴) $\frac{Z}{4}$