

# سوالات ارشد

برق سال ۹۷

۱- ظرفی حاوی ۲۰ توپ مشابه با شماره‌ها (۱ تا ۲۰) است، سه بار به صورت تعادلی و بدون جایگزینی مجدد و هر بار یک توپ از ظرف خارج می‌شود احتمال اینکه شماره توپ (ووم) از شماره توپ‌ها اول و سوم بزرگتر باشد، چقدر است؟

$$\frac{1}{6} \quad (۱) \quad \frac{1}{24} \quad (۲) \quad \frac{1}{12} \quad (۳) \quad \frac{1}{۳۷} \quad (۴) \quad \checkmark$$

از آنجا که شماره توپها در هر سه اندکاب متفاوت است بنابراین بدیهی است که در هر مرحله یکی از سه شماره بزرگتر

خواهد بود و احتمال هر کدام از توپها با هم برابر است. (تعدادی) (شش)

بنابراین جواب مورد نظر  $\frac{1}{۳}$  خواهد بود.

مثال: اگر ۱۰ توپ با شماره‌های ۱ تا ۱۰ در یک ظرف باشد و ۲ توپ

۲- فرض کنید  $X$  یک متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال  $f(x) = 3x^2$   $0 < x < 1$

باشد، اگر  $g(x) = ax^b$  باشد به ازای چه مقادیری از  $a$  و  $b$

متغیر  $Y = g(X)$  دارای توزیع یکنواخت در بازه  $[0, 2]$  است؟

$a = \frac{1}{2}, b = \frac{3}{2}$     $a = 2, b = \frac{1}{3}$     $a = 2, b = 3$  ✓    $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{3}$  (۱)

$$f(x) = 3x^2 \quad \xrightarrow{y = g(x) = ax^b} \quad \textcircled{1} \quad f(y) = \frac{1}{ab} \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{1}{b}-1} \times \overbrace{3 \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{b}}}^{f_x(g(y))}$$

$$\textcircled{1} \quad x = \underbrace{\sqrt[b]{\frac{y}{a}}}_{g(y)} = \frac{y^{\frac{1}{b}}}{a^{\frac{1}{b}}}$$

$$= \frac{3}{ab} \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2-b}{b}}$$

از آنجمله  $Y$  دارای توزیع یکنواخت در بازه  $[0, 2]$  است خواهیم

داشت:

$$f(y) = \frac{1}{2-0} = \frac{3}{ab} \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2-b}{b}} \rightarrow \underline{b=3, a=2}$$

۳ - فرض کنید تابع چگالی متغیر  $y$  بصورت  $f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-1)^2}{2}}$

است و چگالی متغیر  $X$  بصورت  $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$  است اگر

بدانیم  $E[X|y] = y + \frac{1}{\lambda}$  است، مقدار  $\lambda$  کدام است؟

(۱)  $\frac{3}{2}$       (۲)  $\frac{1}{2}$       (۳)  $\frac{2}{3}$       (۴)  $\frac{1}{3}$

یا داورری:

$$\begin{aligned} E[E[X|y]] &= E(X) \\ E[E[y|x]] &= E(y) \end{aligned}$$

$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-1)^2}{2}} \rightarrow$  نرمال  $\begin{cases} \mu_y = E(y) = 1 \\ \sigma_y^2 = 1 \end{cases}$

$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \rightarrow$  نمایی  $\begin{cases} E(x) = \frac{1}{\lambda} \\ \sigma^2(x) = \frac{1}{\lambda^2} \end{cases}$

$E[X|y] = y + \frac{1}{\lambda} \rightarrow E[E(X|y)] = E(y + \frac{1}{\lambda})$

$\rightarrow \underbrace{E(x)}_{\frac{1}{\lambda}} = \underbrace{E(y)}_1 + \frac{1}{\lambda}$

$\rightarrow \lambda = \frac{2}{3}$

۴- تابع چگالی احتمال مشترک دو متغیر  $X$  و  $Y$  بصورت

$$f(x, y) = A e^{-\alpha^r - |y|}$$

است که در آن  $A$  یک مقدار ثابت مثبت است. مقدار

واریانس  $Z = 2x - y$  کدام است؟

۱) ۸      ۲) ۲      ۳) ۴      ۴) ۱۴      ۵) ۶

اولاً:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x, y) = A e^{-\alpha^r} x e^{-|y|} \rightarrow \text{مستقل} \\ -\infty < x < \infty \\ -\infty < y < \infty \end{array} \right. \rightarrow \text{Cov}(x, y) = 0$$

ثانیاً:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} \rightarrow \sigma_x^2 = \frac{1}{\alpha^2} \\ f(y) = \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha|y|} \rightarrow \sigma_y^2 = \frac{2}{\alpha^2} \\ \mu_y = 0, \sigma_y^2 = \frac{2}{\alpha^2} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \sigma_z^2 &= \sigma^2(2x - y) = \cancel{4} \sigma_x^2 + \cancel{4} \sigma_y^2 - \cancel{4} \text{Cov}(x, y) \\ &= 4 \end{aligned}$$

۵- تابع حقیقی مشترک  $x$  و  $y$  بصورت:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{4}{3\pi} & x^2 + y^2 \leq 1, x > 0 \\ \frac{2}{3\pi} & x^2 + y^2 \leq 1, x < 0 \end{cases}$$

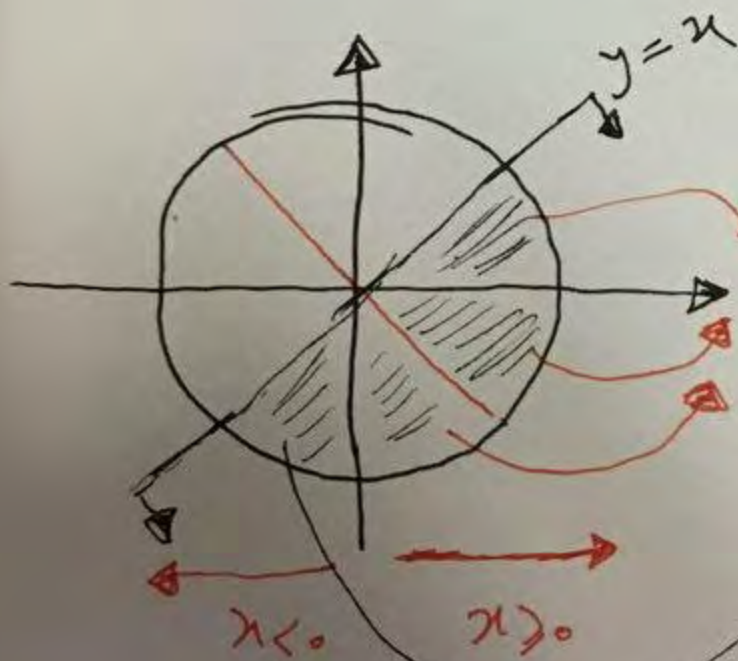
احتمال  $P(x > y)$  کدام است؟

$\frac{1}{12}$  (۱)  $\frac{1}{3}$  (۲)  $\frac{1}{2}$  (۳)  $\frac{5}{12}$  (۴)

تابع  $f(x, y) = \frac{1}{\text{مساحت کل}} = \frac{1}{\text{عدد}}$  است

$$f(x, y) = \frac{4}{3\pi} = \frac{1}{\frac{3\pi}{4}}$$

$$f(x, y) = \frac{2}{3\pi} = \frac{1}{\frac{3\pi}{2}}$$



$$\frac{\frac{3\pi}{4}}{3\pi} + \frac{\frac{3\pi}{2}}{3\pi} = \frac{7}{12}$$