EE۹۷

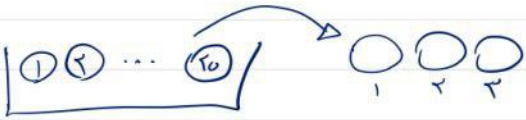
۴۱- ظرفی حاوی ۲۰ توپ مشابه با شماره‌های ۱ تا ۲۰ است. سه بار به‌صورت تصادفی و بدون جایگذاری مجدد و هر بار یک توپ از ظرف خارج می‌کنیم. احتمال اینکه شمارهٔ توپ دوم از شمارهٔ توپ‌های اول و سوم بزرگتر باشد، چقدر است؟

۱) $\frac{1}{6}$

۲) $\frac{1}{24}$

۳) $\frac{1}{12}$

۴) $\frac{1}{3}$ ✓



X_i: شماره توپ iام $\Rightarrow X_i \in \{1, 2, \dots, 20\}$

$1 \le i \le 3$

نگرش اول ◁

$$P_r(\text{شماره توپ دوم از شماره توپ اول و سوم بزرگ‌تر باشد}) = P_r(\overbrace{X_2 > X_1,\ X_2 > X_3}^{X_2 > \max\{X_1, X_3\}})$$

$$= P_r(\underbrace{X_1 < X_3 < X_2}_{\text{مسئله انتخاب فاصله‌دار}}) + P_r(X_3 < X_1 < X_2)$$

تعداد جواب‌های این معادله

$1 \le X_3 < X_i < X_j \le 20$

$$= \frac{\binom{20}{3} + \binom{20}{3}}{20 \times 19 \times 18} = \frac{\cancel{2} \times \frac{\cancel{20} \times \cancel{19} \times \cancel{18}}{3 \times \cancel{2}}}{\cancel{20} \times \cancel{19} \times \cancel{18}} = \frac{1}{3} \checkmark$$

نگرش دوم ◁

با توجه به این که انتخاب‌ها بدون جای‌گذاری هستند، بنابراین شماره توپ‌های انتخابی متفاوت خواهد بود که هر یک از توپ‌های انتخابی با احتمال یکسان می‌تواند Max باشد، پس خواهیم داشت:

$$\begin{cases} P_r(X_1 > \max\{X_2, X_3\}) + \overbrace{P_r(X_2 > \max\{X_1, X_3\})}^{\text{مطلوب سوال}} + P_r(X_3 > \max\{X_1, X_2\}) = 1 \\ P_r(X_1 > \max\{X_2, X_3\}) = P_r(X_2 > \max\{X_1, X_3\}) = P_r(X_3 > \max\{X_1, X_2\}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow P_r(X_2 > \max\{X_1, X_3\}) = \frac{1}{3} \checkmark$$

EE97

۴۲- فرض کنید X یک متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال $f_X(x)=\begin{cases}3x^2 & 0\le x\le 1\\ 0 & \text{در غیراین‌صورت}\end{cases}$ باشد. اگر $g(x)=ax^b$ (پیوسته) باشد، به‌ازای چه مقادیر از a و b متغیر تصادفی $y=g(x)$ دارای توزیع یکنواخت در بازهٔ [۰,۲] خواهد بود؟

۱) $a=\frac{1}{2}, b=\frac{1}{3}$

۲) $a=2, b=3$ ✓

۳) $a=2, b=\frac{1}{3}$

۴) $a=\frac{1}{2}, b=3$

$f_Y(y)=\frac{1}{2-0}=\frac{1}{2}$ (I)

روش اول

تابع توزیع تجمعی

$F_Y(y)=P_r(Y\le y)=P_r(g(x)=ax^b\le y)$

$=P_r\left(X\le\sqrt[b]{\frac{y}{a}}\right)$

با توجه به گزینه‌ها، مقادیر a و b مثبت هستند و در نتیجه جهت نامساوی تغییر پیدا نکند.

برای پیدا کردن تابع چگالی از تابع توزیع مشتق می‌گیریم.

$=\int_0^{\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{1}{b}}}3x^2\,dx=x^3\Big|_0^{\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{1}{b}}}=\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{3}{b}}$

تابع چگالی احتمال

$\xrightarrow{g(x)\text{ پیوسته}} f_Y(y)=\frac{dF_Y(y)}{dy}=\frac{1}{a}\cdot\frac{3}{b}\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{3}{b}-1}=\frac{3}{ab}\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{3}{b}-1}=\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{3}{b}}\cdot\frac{3}{b}y^{\frac{3}{b}-1}$ (II)

$\xrightarrow{\text{I},\text{II}} f_Y(y)=\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{3}{b}}\cdot\frac{3}{b}y^{\frac{3}{b}-1}\Rightarrow\frac{3}{b}-1=0\Rightarrow b=3$ ✓

$\frac{1}{2}y^0$

$\xrightarrow{b=3} f_Y(y)=\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{3}{3}}\cdot\frac{3}{3}y^0\Rightarrow a=2$ ✓

روش دوم

با داوری قضیه:
- X پیوسته
- $Y=g(x)$ معکوس‌پذیر و مشتق‌پذیر
- ابسته در بازه مقادیر ممکن X

$\Rightarrow f_Y(y)=f_X(x)\left|\frac{dx}{dy}\right|,\ \forall x: Y=g(x)$

$g'(y)$

محاسبه به این روش بر عهده خودتان! ☺

$Y \sim N(\mu_y = 1, \sigma_y^2 = 1)$

EE 97

۴۳- فرض کنید تابع چگالی متغیر تصادفی Y به‌صورت $f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-1)^2}{2}}$ و چگالی متغیر تصادفی X به‌صورت $f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{سایر} \end{cases}$ باشد. اگر بدانیم که $E\{X|Y=y\} = y + \frac{1}{2}$ (میانگین شرطی X به شرط Y) است؛ در این‌صورت مقدار λ کدام است؟

$X \sim Exp(\lambda)$

۱) $\frac{3}{2}$

۲) $\frac{1}{2}$

۳) $\frac{2}{3}$ ✓

۴) ۲

$$\underbrace{E[X]}_{\frac{1}{\lambda}} = E[E[X|Y=y]] = E[Y + \tfrac{1}{2}]$$

$$= \underbrace{E[Y]}_{1} + \tfrac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{\lambda} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{2}{3} \checkmark$$

$3/2$

تابعی از Y

(یادآوری) توزیع X وابسته به Y (متغیر تصادفی) $\Rightarrow E[X] = E[E[X|Y]]$

$$= \int_y E[X|Y=y] f_Y(y)\, dy$$

روی مقادیر y

$$\underbrace{A e^{-x^2} \cdot e^{-|y|}}_{h(x)\,\cdot\,g(y)} \Rightarrow X \text{ و } Y \text{ مستقل}$$

X و Y مستقل و توابعی

EE97

۴۴- تابع چگالی احتمال مشترک دو متغیر تصادفی X و Y به‌صورت $f_{XY}(x,y) = Ae^{-x^2-|y|}$ است که در آن A یک مقدار ثابت مثبت می‌باشد. واریانس متغیر تصادفی $Z = 2X - Y$ کدام است؟

۱) ۸
۲) ۲
۳) ۴
۴) ۶

که چون محدودیتی روی مقادیر ممکن X و Y تعریف نشده $\Rightarrow x, y \in (-\infty, \infty)$

اصل ۲) $\iint_{-\infty<x,y<\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} Ae^{-x^2-|y|}\,dy\,dx = 1$

تابع چگالی توزیع نرمال $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x} e^{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}}$

تابع چگالی توزیع لاپلاس دوپارامتری $\frac{1}{2b} e^{\frac{-|x-\mu_y|}{b}}$

$$\Rightarrow A\sqrt{\pi}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\frac{1}{\sqrt{2}}} e^{\frac{-x^2}{2\times\frac{1}{2}}}\,dx}_{1} \cdot 2\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\cdot 1} e^{\frac{-|y-0|}{1}}\,dy}_{1} = 1$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$$

$$\Rightarrow f_X(x) = \int_y f(x,y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-x^2-|y|}\,dy = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-x^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|y|}\,dy$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-x^2}\Big[\underbrace{\int_{-\infty}^{0} e^{y}\,dy}_{e^{y}\big|_{-\infty}^{0}=1} + \underbrace{\int_{0}^{\infty} e^{-y}\,dy}_{-e^{-y}\big|_{0}^{\infty}=1}\Big] = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\frac{1}{\sqrt{2}}} e^{\frac{-(x-0)^2}{2\times\frac{1}{2}}}$$

$-\infty < x < \infty$

$$\Rightarrow X \sim N\left(\mu_x = 0,\ \sigma_x^2 = \tfrac{1}{2}\right)$$

$$\xrightarrow{X \text{ و } Y \text{ مستقل}} f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y) \Rightarrow f_Y(y) = \frac{1}{2}e^{-|y|} = \frac{1}{2\cdot 1} e^{\frac{-|y-0|}{1}},\ -\infty < y < \infty$$

$$\Rightarrow Y \sim \text{laplace}(\mu_y = 0,\ b = 1)$$

$$E[Y] = \mu_y = 0,\ Var(Y) = 2b^2 = 2$$

اگر واریانس توزیع لاپلاس را نمی‌دانید $\rightarrow$ حتماً حساب کنید

انتگرال‌گیری به کمک تغییر متغیر و تابع گاما

$$Var(Y) = \underbrace{E[Y^2]}_{2b^2+\mu_y^2} - (\underbrace{E[Y]}_{\mu_y})^2 = \int_{-\infty}^{\infty} y^2\,\frac{1}{2}e^{-|y|}\,dy - \mu_y^2 = 2b^2$$

مطلوب سوال

$$Var(2X - Y) = 2^2\underbrace{Var(X)}_{1/2} + (-1)^2\underbrace{Var(Y)}_{2} + 2\cdot(2\cdot -1)\underbrace{Cov(X,Y)}_{0} = 4$$

X و Y مستقل $\Rightarrow 0$

یادآوری) $Var\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2\,Var(X_i) + 2\sum\sum_{i<j}\alpha_i\alpha_j\,Cov(X_i, X_j)$

EE۹۷

۴۵- تابع چگالی احتمال مشترک دو متغیر تصادفی X و Y به‌صورت زیر است:

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases}\frac{4}{3\pi} & x^2+y^2\le 1, x\ge 0\\ \frac{2}{3\pi} & x^2+y^2\le 1, x<0\end{cases}$$

توزیع در ناحیه نارنجی یکنواخت $\frac{1}{\frac{3}{4}\pi}$ مساحت نیم دایره نارنجی

توزیع در ناحیه سبز یکنواخت $\frac{1}{\frac{3}{2}\pi}$ مساحت نیم دایره سبز

احتمال $P[X>Y]$، برابر کدام است؟

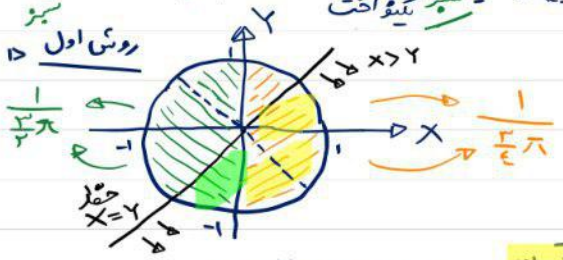
۱) $\frac{7}{12}$

۲) $\frac{1}{3}$

۳) $\frac{2}{3}$

۴) $\frac{5}{12}$

روش اول



مساحت دایره واحد $\pi\cdot 1^2=\pi$

$$\Rightarrow P_r(X>Y)=\frac{\text{مساحت ناحیه مورد نظر}}{\text{مساحت کل ناحیه مقادیر X و Y}}=\frac{3\times\frac{\pi}{8}}{\frac{3}{4}\pi}+\frac{\frac{\pi}{8}}{\frac{3}{2}\pi}=\frac{4}{8}+\frac{2}{24}=\frac{12+2}{24}=\frac{14}{24}=\frac{7}{12}$$

روش دوم

$$P_r(X>Y)=\iint_{\substack{x>y\\ x^2+y^2\le 1}} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$

$$=\iint_{\substack{x\ge 0\\ x>y\\ x^2+y^2\le 1}}\frac{4}{3\pi}\,dx\,dy+\iint_{\substack{x<0\\ x>y\\ x^2+y^2\le 1}}\frac{2\pi}{3}\,dx\,dy=\dots$$

محاسبات با خودتان!