

«بسمه تعالی»

@mtsignal محسن آقایی

سؤالات و پاسخ‌های درس سیگنال - آزمون ارزش برقی ۱۴۰۱

مجموعه سؤالات در کل، متوسط بوده است. سؤالات ۱۰۶ و ۱۰۹ از جمله دوم مطرح شدند و بقیه سؤالات با اطلاعات
جله اول قابل حل بودند.

فصل اول

۱۰۳- رابطه $x(n)$ ورودی یک سیستم علی و $y(n)$ خروجی سیستم به صورت زیر است:

$$y(n) = \frac{1}{4} |y(n-1)| + x(n)$$

در مورد پایداری و وارون پذیری این سیستم کدام گزینه درست است؟

- (۱) سیستم ناپایدار و وارون پذیر است.
(۲) سیستم ناپایدار و وارون ناپذیر است.
(۳) سیستم پایدار و وارون پذیر است. ✓
(۴) سیستم پایدار و وارون ناپذیر است.

بررسی وارون پذیری:

$$y(n) = \frac{1}{4} |y(n-1)| + x(n) \Rightarrow x(n) = y(n) - \frac{1}{4} |y(n-1)|$$

با استفاده از رابطه فوق می‌توان ورودی را بدون انجام از روی فرجه بازیابی کرد. پس سیستم وارون پذیر است.

بررسی پایداری: با توجه به علی بودن سیستم و با فرض ورودی محدود $x(n) = A$ ، رابطه سیستم را به صورت زیر بنویسیم:

$$y(n) = \frac{1}{4} |y(n-1)| + A = \frac{1}{4} \left| \frac{1}{4} |y(n-2)| + A \right| + A = \left| \frac{1}{4} y(n-2) \right| + \frac{1}{4} A + A$$
$$y(n-1)$$

حال دوباره با جایگزینی $y(n-2) = \frac{1}{4} |y(n-3)| + A$ در رابطه فوق و ادامه همین روند و با توجه به $|a+b| \leq |a| + |b|$ داریم:

$$y(n) \leq |A| + \frac{1}{4} |A| + \frac{1}{16} |A| + \dots + \frac{1}{4^n} |y(-\infty)|$$

با فرض محدود بودن $y(-\infty)$ و صرف نظر از جمله آخر خواهیم داشت:

$$y(n) \leq |A| \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 2|A| < \infty$$

پس سیستم پایدار است.

تذکره: اصولاً حذف جمله $\frac{1}{4^n} |y(-\infty)|$ صحیح نباشد و مطابق باید شرط محدود بودن $y(-\infty)$ و یا شرط سکون اول درختن
سیستم را بی‌لازم کرد. بنا براین سؤال مذکور دارای ایراد بوده و بسته به اینکه شرط کمالی سیستم چه باشد، ممکن است

سیستم پایدار یا ناپایدار باشد. در واقع برای اغلباً نظریات در مورد پایداری سیستم با مقدار تفاضل مذکور، نیاز به یک شرط کمکی است. مثلاً اگر شرط کلاسیک سیستم به صورت زیر باشد، سیستم ناپایدار است.

$$x(n) = 0 \text{ و } n < n_0 \rightarrow y(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ و } n < n_0$$

شرط کمکی فوق، یعنی تا لحظه‌ای که ورودی صفر است، خروجی برابر $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ باشد.

بنابراین هر دو گسسته پایدار و ناپایدار هم‌زمانه صحیح باشد و سؤال قابل اعتراض است: آری چه امتیازاً طراح، پایداری را به عنوان گسسته صحیح اعلام خواهد کرد!

تذکره ۲: نکته است این سؤال نیست آنکه آیا علی‌البدون سیستم تأخیری در پایداری دارد یا خیر؟! ۲. تبارت بهر آنکه در صورت سؤال، نیز علی‌البدون سیستم مطرح می‌شود، چه تفاوتی در حل سؤال ایجاد می‌کند؟! در صورت نیز علی‌البدون سیستم باید بطور کلی به تفاضل به گونه‌ای انجام می‌گرفت که خروجی به لحاظ آکسید طایفه می‌شود. یعنی باید $|y(n-1)|$ نگه داشته می‌شد و بعد $x(n) = A$ به طرف دیگر می‌رفت:

$$|y(n-1)| = 2(y(n) - A) \Rightarrow |y(n)| = 2(y(n+1) - A)$$

پس $y(n+1)$ را از رابطه فوق با جایگزینی $n+1$ جای n در دو طرف تساوی محاسبه کرده و در هر دو طرف قرار می‌دهیم و این کار را ادامه می‌دهیم. در این صورت به دلیل افزایش شدن ضریب ۲ در هر بار جایگزینی، سمت راست رابطه فوق و در واقع خروجی $y(n)$ نامحدود می‌شود.

۱۰۴- سیگنال حقیقی $x(t)$ متناوب با دوره تناوب ۸ با ضرایب سری فوریه a_k بوده و داریم $a_5 = 2$. اگر ضرایب سری

فوریه سیگنال $y(t) = 2x(t-4)$ را b_k بنامیم، کدام گزینه درست است؟

فصل هشتم

$$b_{-5} = -2 \quad (2)$$

$$b_5 = 4 \quad (1)$$

$$b_{-5} = -4 \quad (4) \quad \checkmark$$

$$b_5 = 2 \quad (3)$$

$$y(t) = 2x(t-4) \rightarrow b_k = 2a_k e^{jk\omega_0(-4)} \quad \text{و} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow b_k = 2a_k \cdot (-1)^k \Rightarrow b_{-5} = -2a_{-5}$$

با توجه به حقیقت بودن $x(t)$ و رتبه زوجی $a_k = a_k^*$ داریم:

$$b_{-5} = -2a_{-5}^* = -2$$

۱۰۵- سیگنال $x(t) = e^{-t}$ وارد سیستم سببی با پاسخ ضربه $h(t) = e^{-2t}u(t)$ می‌شود. پاسخ سیستم کدام است؟

فصل غم (ده صفر طلایی)

$$y(t) = e^{-2t} \quad (2)$$

$$y(t) = e^{-|t|} \quad (4)$$

$$y(t) = e^{-t} \quad (1) \checkmark$$

$$y(t) = 1 \quad (3)$$

$$h(t) = e^{-2t} u(t) \longrightarrow H(s) = \frac{1}{s+2}, \operatorname{Re}(s) > -2$$

$$x(t) = e^{-t} \longrightarrow y(t) = H(-1) e^{-t} = e^{-t}$$

۱۰۶- مقدار مجموع زیر کدام است؟

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1 + 4\pi^2 k^2}$$

فصل سیزدهم کتاب (سنگ جزوه)

$$\frac{1+e^{-1}}{2(1-e^{-1})} \quad (1)$$

$$\frac{2e^{-1}-1}{4(1-e^{-1})} \quad (2) \checkmark$$

$$\frac{2e^{-1}+1}{2(1-e^{-1})} \quad (3)$$

$$\frac{2e^{-1}+1}{4(1-e^{-1})} \quad (4)$$

$$x(t) \xleftrightarrow{FS} a_k = \frac{1}{1 + 4\pi^2 k^2} \implies x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$\implies A = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 + 4\pi^2 k^2} = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + 4\pi^2 k^2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} x(0) - \frac{1}{2}$$

حال بآئیم به نکته ۴۶ داریم:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} z(t - kT) \longleftrightarrow z(t) \longleftrightarrow Z(\omega) \longleftrightarrow a_k = \frac{1}{T} Z(k\omega_0)$$

توجه شود که در این کدال T با فرکانس ω_0 فرض کرده و باید ω_0 را مشخص کنیم (چرا؟).
اما با صحت ثابت که $\omega_0 = 2\pi$ فرض شود. حال بآئیم به نکته ۴۶ به طور محسوس داریم:

$$a_k = \frac{1}{1 + 4\pi^2 k^2} = \frac{1}{2} Z(k\omega_0) \longrightarrow Z(\omega) = \frac{1}{1 + \omega^2} \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} z(t) = \frac{1}{2} e^{-|t|}$$

$$\Rightarrow x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{r} e^{-(t-k)} \Rightarrow x(0) = \frac{1}{r} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-|k|} = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k} - \frac{1}{r}$$

$$\Rightarrow x(0) = \frac{1}{1-e^{-1}} - \frac{1}{r} \Rightarrow A = \frac{1}{r} x(0) - \frac{1}{r} = \frac{-1 + e^{-1}}{r(1-e^{-1})}$$

۱۰۷- معادله تفاضلی یک سیستم LTI با پاسخ دست چپی (left sided) به صورت زیر است؟

$$y[n] + 2y[n-1] + 2y[n-2] = x[n]$$

اگر خروجی سیستم به ورودی $x(n) = \delta[n-2]$ را با $y(n)$ نمایش دهیم در این صورت مقدار $y(0) + y(1) + y(2)$ کدام است؟

فصل نهم

(۱) صفر

(۲) $\frac{1}{2}$ ✓

(۳) -۲

(۴) $\frac{1}{4}$

$$y[n] + 2y[n-1] + 2y[n-2] = x[n] \Rightarrow H(z) = \frac{1}{1 + 2z^{-1} + 2z^{-2}}$$

پایخ به $\delta[n-2]$ برابر $y[n] = h[n-2]$ را به طور معادل برابر $Y(z) = \frac{z^2}{1 + 2z^{-1} + 2z^{-2}}$ می باشد.

با توجه به اینکه پایخ مزید، یک می باشد (طبق صورت تست)، با استفاده از روش تقسیم داریم:

$$Y(z) = \frac{1}{z^2 + 2z + 2} = \frac{1}{2 + 2z + z^2} \rightarrow$$

$$\begin{array}{r} 1 \overline{) 2 + 2z + z^2} \\ \underline{2} \\ 0 \end{array}$$

$\downarrow$
 $y[0]$

با توجه به یک می بودن $y[n]$ ، مقادیر خروجی در لحظه قبل از $n=0$ را می دهیم.

$$y(1) = y(2) = 0$$

۱۰۸- سیگنال زمان گسسته $x[n] = \begin{cases} 0 & n \text{ زوج} \\ \left(\frac{1}{2}\right)^n & n \text{ فرد} \end{cases}$ را با تبدیل فوریه $X(e^{j\omega})$ در نظر می‌گیریم. اگر

$$a \triangleq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{Re}[x^*(e^{j\omega})] d\omega$$

$$b \triangleq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{Im}[x^*(e^{j\omega})] d\omega$$

در آن صورت مقادیر a و b کدام است؟

(۱) $b = \frac{\lambda}{15}, a = 0$

(۲) $b = \frac{\lambda}{6}, a = 0$

(۳) $b = 0, a = \frac{\lambda}{15}$ ✓

(۴) $b = 0, a = \frac{\lambda}{6}$

فصل پنجم

طبق ما به تقیم یافته بار سوال در جمله دوم و یا راسته از خاصیت کانولوشن در جمله اول داریم،

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X^*(\omega) d\omega = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) x(-n) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ (2 \nmid n)}}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|} \cdot j^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{|-n|} \cdot j^{-n} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ (2 \nmid n)}}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$$

$$\Rightarrow I = 2 \sum_{\substack{n=0 \\ (2 \nmid n)}}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\lambda}{18}$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{Re}\{X^*(\omega)\} d\omega = \text{Re}\left\{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X^*(\omega) d\omega\right\} = \text{Re}\{I\} = \text{Re}\left\{\frac{\lambda}{18}\right\} = \frac{\lambda}{18}$$

$$b = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{Im}\{X^*(\omega)\} d\omega = \text{Im}\left\{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X^*(\omega) d\omega\right\} = \text{Im}\{I\} = \text{Im}\left\{\frac{\lambda}{18}\right\} = 0$$

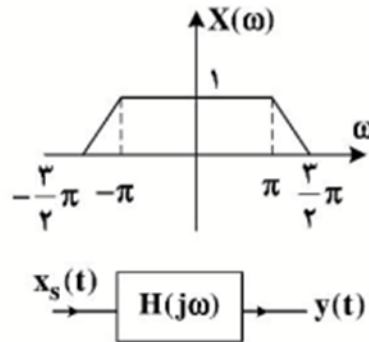
۱۰۹- سیگنال $x(t)$ دارای تبدیل فوریه $X(j\omega)$ است، که در شکل زیر نمایش داده شده است. سیگنال $x(t)$ با نرخ

$\frac{1}{T_s} = 1$ نمونه در ثانیه نمونه برداری شده. سیگنال $x_s(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_s)$ به دست می آید و سیگنال

$x_s(t)$ از فیلتر پایین گذر $H(j\omega)$ عبور کرده و خروجی آن را با $y(t)$ نمایش می دهیم. نسبت $\frac{y(0)}{x(0)}$ کدام

است؟

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \pi \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$



عمل هفتم کتاب (پارادوکس زو)

(۱) $\frac{5}{4}$

(۲) $\frac{4}{5}$

(۳) $\frac{3}{2}$

(۴) ۱ ✓

$$x_s(t) = x(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \delta(t-k)$$

$$H(\omega) = \Pi\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} h(t) = \text{sinc } t$$

$$y(t) = x_s(t) * h(t) = \text{sinc } t * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \delta(t-k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \text{sinc}(t-k)$$

$$\Rightarrow y(0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \text{sinc}(-k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \delta[k] = x(0)$$

$$\Rightarrow \frac{y(0)}{x(0)} = 1$$

پس از آنکه $X(\omega)$!

۱۱۰- فرض کنید سیگنال گسسته زمان متناوب و حقیقی $x[n]$ با دوره تناوب $N = 5$ دارای متوسط صفر (یعنی $a_0 = 0$)

است. اگر در بسط سری فوریه این سیگنال دو تا از ضرایب به صورت: $a_1 = -1 + j3$, $a_2 = 2 + j\sqrt{5}$ باشد، توان

متوسط این سیگنال چقدر است؟

عمل هفتم

(۲) ۷۸

(۴) ۴۴

(۱) ۳۸ ✓

(۳) ۳۲

$$P_{\infty} = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} |x(n)|^2 = \sum_{k=\langle N \rangle} |a_k|^2 = \sum_{k=-2}^2 |a_k|^2 = |a_{-2}|^2 + |a_{-1}|^2 + |a_0|^2 + |a_1|^2 + |a_2|^2$$

↑
بازگشت

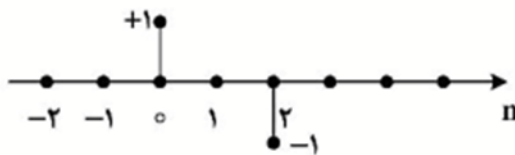
$$\bar{x}(n) \rightarrow |a_{-2}|^2 = |a_2|^2 = 9 \quad , \quad |a_{-1}|^2 = |a_1|^2 = 10$$

$$\Rightarrow P_{\infty} = 9 + 10 + 0 + 10 + 9 = 38$$

۱۱۱- تبدیل فوریه پاسخ ضربه یک سیستم گسسته خطی و تغییر ناپذیر با زمان به صورت زیر است.

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{r} e^{-j\omega})(r - e^{j\omega})}$$

اگر پاسخ این سیستم به ورودی $x(n]$ که در شکل زیر نمایش داده شده است $y(n]$ باشد، مقدار $\frac{y(1)}{y(0)}$ کدام است؟



فصل هفتم

$$\frac{5}{16} \quad (1)$$

$$\frac{5}{7} \quad (2)$$

$$\frac{3}{16} \quad (3) \checkmark$$

$$\frac{3}{7} \quad (4)$$

$$H(\omega) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{r} e^{-j\omega})(r - e^{j\omega})} \xrightarrow{e^{j\omega} = z} H(z) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{r} z^{-1})(r - z)}, \quad \frac{1}{r} < |z| < r$$

$$H(z) = \frac{-z^{-1}}{(1 - \frac{1}{r} z^{-1})(1 - rz^{-1})} = \frac{\frac{r}{z}}{1 - \frac{1}{r} z^{-1}} + \frac{-\frac{r}{z}}{1 - rz^{-1}}$$

$|z| > \frac{1}{r} \quad |z| < r$

$$\Rightarrow h(n) = \frac{r}{z} \left(\frac{1}{r}\right)^n u(n) + \frac{r}{z} r^n u[-n-1]$$

$$y(n) = h(n) * x(n) = h(n) * (\delta(n) - \delta(n-2)) = h(n) - h(n-2)$$

$$\Rightarrow \frac{y(1)}{y(0)} = \frac{h(1) - h(-1)}{h(0) - h(-2)} = \frac{\frac{r}{z} - \frac{r}{18}}{\frac{r}{z} - \frac{r}{28}} = \frac{\frac{1}{18}}{\frac{17}{28}} = \frac{2}{17}$$

۱۱۲- تبدیل لاپلاس پاسخ ضربه یک سیستم خطی و تغییر ناپذیر علی به صورت زیر است. اگر پاسخ این سیستم به

ورودی $x(t) = tu(t)$ را با $y(t)$ نمایش دهیم، مقدار $y'(+\infty)$ کدام است؟ $(y'(t) = \frac{d}{dt}y(t))$

$$H(s) = \frac{s^2 + 3s + 2}{(s+3)}$$

فعل غم

$$\frac{2}{9} \quad (2)$$

$$\frac{2}{3} \quad (4) \checkmark$$

$$\frac{7}{9} \quad (1)$$

$$\frac{3}{2} \quad (3)$$

$$H(s) = \frac{s^2 + 3s + 2}{s + 3}, \quad -2 < \text{Re}(s) < +\infty, \quad X(s) = \frac{1}{s^2}, \quad \text{Re}(s) > 0$$

$$Y(s) = \frac{s^2 + 3s + 2}{s^2(s+3)}, \quad \text{Re}(s) > 0$$

$$z(t) = y'(t) \longrightarrow Z(s) = sY(s) = \frac{s^2 + 3s + 2}{s(s+3)}, \quad \text{Re}(s) > 0$$

$$y'(+\infty) = z(+\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sZ(s) = \frac{2}{3}$$

۱۱۳- سیستم نشان داده شده در شکل زیر را در نظر بگیرید. سیگنال $x(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{\pi}\right) \cos(2t)$ در ورودی این

سیستم قرار گرفته و فیلتر $H(j\omega)$ نیز یک فیلتر پایین‌گذر ایدئال با فرکانس قطع a است. مقدار a چقدر انتخاب شود تا انرژی سیگنال خروجی $y(t)$ برابر با ۲۰٪ انرژی سیگنال ورودی باشد؟



فعل غم

$$1 \quad (1)$$

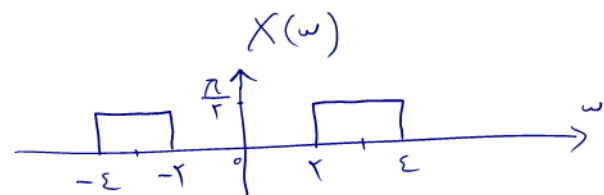
$$1/6 \quad (2) \checkmark$$

$$0/4 \quad (3)$$

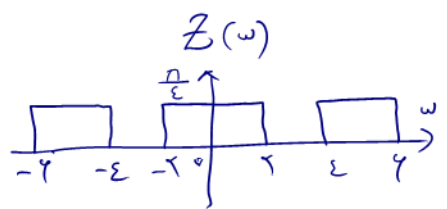
$$2 \quad (4)$$

$$x(t) = \frac{\sin t}{t} \cdot \cos 2t = \frac{1}{2} \frac{\sin t}{t} e^{j2t} + \frac{1}{2} \frac{\sin t}{t} e^{-j2t}$$

$$\Rightarrow X(\omega) = \frac{\pi}{2} \Pi\left(\frac{\omega-2}{2}\right) + \frac{\pi}{2} \Pi\left(\frac{\omega+2}{2}\right)$$



$$E_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 d\omega = \frac{\pi}{2}$$

$$z(t) = x(t) \cos 2t \xrightarrow{F} Z(\omega) = \frac{1}{2} X(\omega - 2) + \frac{1}{2} X(\omega + 2)$$


$$Y(\omega) = H(\omega) \cdot Z(\omega) = \Pi\left(\frac{\omega}{2a}\right) \cdot Z(\omega)$$

$$E_y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |Y(\omega)|^2 d\omega \stackrel{a < 2}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{\pi^2}{4} d\omega = \frac{\pi a}{4} = \frac{V_0}{100} E_x = \frac{\pi}{100} \Rightarrow a = 1/2$$

۱۱۴- پاسخ سیستم LTI علی با تابع تبدیل $H(s) = \frac{s}{s+1}$ به ورودی $x(t) = u(t) - e^{-2t}$ را با $y(t)$ نمایش می دهیم.

مقدار $y(0)$ کدام است؟

فصل نهم (ده صفحه طولانی)

۱ (۲)

۱) صفر

-۱ (۴)

۳) ∞ ✓

$$x(t) = u(t) - e^{-2t}, \quad H(s) = \frac{s}{s+1}, \quad \text{Re}(s) > -1$$

$$x_1(t) = e^{-2t} \longrightarrow y_1(t) = H(-2) e^{-2t} = \infty \longrightarrow \text{زیرا } s = -2 \text{ در ناحیه قطب های } H(s) \text{ قرار ندارد.}$$