حل توسط پوریا نژادمحمد

۳- رابطه $x(n)$ ورودی و $y(n)$ خروجی سیستم به‌صورت زیر است:

$$y(n)=\frac{1}{2}\left|y(n-1)\right|+x(n)$$

در مورد پایداری و وارون پذیری این سیستم کدام گزینه درست است؟

۱) سیستم پایدار و وارون پذیر است. ✓

۲) سیستم ناپایدار و وارون پذیر است

۳) سیستم پایدار و وارون ناپذیر است

۴) سیستم ناپایدار و وارون ناپذیر است

متوسط!

$$y[n]=\begin{cases}\frac{1}{2}y[n-1]+x[n] & y[n-1]\geqslant 0\\ -\frac{1}{2}y[n-1]+x[n] & y[n-1]<0\end{cases}$$

$$\Rightarrow x[n]=\begin{cases}y[n]-\frac{1}{2}y[n-1] & y[n-1]\geqslant 0\\ y[n]+\frac{1}{2}y[n-1] & y[n-1]<0\end{cases}$$

ورودی برحسب خروجی بدون ابهام ⇐ وارون پذیر

$$\text{if } x=A \Rightarrow y[n]=\frac{1}{2}\left|y[n-1]\right|+A$$

این سیستم پایدار است.

به‌ازای ورودی کراندار خروجی کراندار خواهد بود. و مثال نقضی هم ندارد

۱۰۴- سیگنال حقیقی $x(t)$ متناوب با دورهٔ تناوب ۸ با ضرایب سری فوریه a_k بوده و داریم $a_{۵} = ۲$. اگر ضرایب سری فوریه سیگنال $y(t) = ۲x(t-۴)$ را b_k بنامیم، کدام گزینه درست است؟

۱) $b_{۵} = ۲$ ۲) $b_{۵} = ۴$

۳) $b_{-۵} = -۴$ ✓ ۴) $b_{-۵} = -۲$

آسان!

$$y(t) = ۲x(t-۴) \Rightarrow b_k = ۲a_k e^{-jk\pi} = ۲(-۱)^k a_k \quad ۱$$

حقیقی $x(t) = x^*(t) \Rightarrow a_k = a^*_{-k} \quad ۲$

$$\Rightarrow b_{۵} = -۲a_{۵} \quad , \quad b_{-۵} = -۲a_{-۵}$$

$$a_{۵} = a^*_{-۵} = ۲ = a_{-۵} = a_{۳} = a_{۱۱} = \cdots$$

ترکیب رابطه ۱ و ۲

$$\Rightarrow b_{۵} = b_{-۵} = -۲ \times ۲ = -۴$$

۱۰۵- سیگنال $x(t)=e^{-t}$ وارد سیستم سببی با پاسخ ضربه $h(t)=e^{-2t}u(t)$ می‌شود. پاسخ سیستم کدام است؟

۱) $y(t)=1$ ۲) $y(t)=e^{-t}$

۳) $y(t)=e^{-|t|}$ ۴) $y(t)=e^{-2t}$

آسان!

$$x(t)=e^{-t}\ ,\qquad h(t)=e^{-2t}u(t)$$ علی

$$\Rightarrow H(s)=\frac{1}{s+2}\ ,\quad \sigma>-2$$

$$\Rightarrow y(t)=H(-1)\,e^{-t}=e^{-t}\ ,\qquad -1\in ROC$$ ✓

توجه: سیستم توسط طراح LTI مطرح شده است.

۱۰۶- مقدار مجموع زیر کدام است؟

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1+4\pi^2 k^2}$$

۱) $\dfrac{3e^{-1}+1}{2(1-e^{-1})}$

۲) $\dfrac{1+e^{-1}}{2(1-e^{-1})}$

۳) $\dfrac{3e^{-1}+1}{4(1-e^{-1})}$

۴) $\dfrac{3e^{-1}-1}{4(1-e^{-1})}$ ✓

سخت! باید متوجه می‌شدیم که مقدار ۲kπ جایگزین ω شده است و در واقع سیگنالی متناوب شده است !

$$I = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+4k^2\pi^2} = \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+4k^2\pi^2} - \frac{1}{2}$$

$$H(\omega) = \frac{1}{1+\omega^2} \xrightarrow{F^{-1}} h(t) = \frac{1}{2} e^{-|t|}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-k) \Rightarrow a_k = 1 \;,\; \omega_0 = 2\pi$$

حل توسط پوریا نژاد محمد

$$\Rightarrow \begin{cases} b_k = a_k \cdot H(2k\pi) = \dfrac{1}{1+4k^2\pi^2} \\ y(t) = \dfrac{1}{2} e^{-|t|} * \sum \delta(t-k) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} e^{-|t-k|} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+4k^2\pi^2} = y(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} e^{-|k|}$$

Note Title 5/19/2022

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{e-1} + \frac{e}{e-1}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{e+1}{e-1}$$

$$\Longrightarrow A = \frac{1}{4}\,\frac{e+1}{e-1} - \frac{1}{2} = \frac{3-e}{4(e-1)} = \frac{3e^{-1}-1}{4(1-e^{-1})}$$

حل توسط پوریا نژادمحمد

توضیح: فرض کردیم که سیستم LTI ای داریم با ورودی قطار ضربه و تابع تبدیل $\frac{1}{1+\omega^2}$. یا می‌توانستید حدس بزنید که سیگنال زمانی $\frac{1}{2}e^{-|t|}$ با تناوب 1 متناوب شده است و ضرایب سری فوریه‌اش را بیابید.

توجه: طراح حدود سیگما را غیر استاندارد داده است و بایستی معادل سازی شود.

۱۰۷- معادله تفاضلی یک سیستم LTI با پاسخ دست چپی (left sided) به‌صورت زیر است؟

$$y[n]+3y(n-1)+2y[n-2]=x[n]$$

اگر خروجی سیستم به ورودی $x(n)=\delta[n-2]$ را با $y(n)$ نمایش دهیم در این صورت مقدار $y(0)+y(1)+y(2)$

حل توسط پوریا نژاد محمد

۱) -2

۲) صفر

۳) $\frac{1}{4}$

۴) $\frac{1}{2}$

$$H(z)=\frac{1}{1+3z^{-1}+2z^{-2}}=\frac{z^2}{z^2+3z+2}$$ متوسط!

قطب ها: $|z|=1\ ,\ |z|=2$

$$\text{Left-handed} \Rightarrow \text{ROC}: |z|<1$$

$$Y(z)=z^{-2}\cdot H(z)=\frac{1}{z^2+3z+2}=\frac{1}{(z+1)(z+2)}$$

$$=\frac{z^{-2}}{(1+z^{-1})(1+2z^{-1})}=z^{-2}\left[\frac{-1}{1+z^{-1}}+\frac{2}{1+2z^{-1}}\right],\ |z|<1$$

$$\Rightarrow y[n]=(-1)^{n-2}u[-n+1]-2(-2)^{n-2}u[-n+1]$$

$$\Rightarrow y[n]=\left[(-1)^n-\frac{1}{2}(-2)^n\right]u[n+1] \Rightarrow \begin{cases} y(0)=\frac{1}{2} \\ y(1)=0 \\ y(2)=0 \end{cases}$$

۱۰۸- سیگنال زمان گسسته $x[n] = \begin{cases} 0 & \text{زوج } n \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|} (j)^n & \text{فرد } n \end{cases}$ را با تبدیل فوریه $X(e^{j\omega})$ در نظر می‌گیریم. اگر

$$a \triangleq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\left[X^2(e^{j\omega})\right]d\omega$$

$$b \triangleq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Im}\left[X^2(e^{j\omega})\right]d\omega$$

حل توسط پوریا نژادمحمد

در آن صورت مقادیر a و b کدام است؟

۱) $b = 0, a = \frac{8}{15}$ ✓

۲) $b = \frac{8}{15}, a = 0$

۳) $b = 0, a = \frac{8}{6}$

۴) $b = \frac{8}{6}, a = 0$

سخت وخوب!

$$a = \frac{1}{2}\left[x[n] * x[n] \Big|_{n=0} + x^*[-n] * x^*[-n] \Big|_{n=0} \right]$$

$$b = \frac{1}{2j}\left[\text{''} \quad \text{''} \quad - \quad \text{''} \quad \text{''} \right]$$

$$x[n] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{|n|} e^{j\frac{\pi}{2}n} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{|n|} e^{-j\frac{\pi}{2}n}$$

$$= j\left(\frac{1}{2}\right)^{|n|} \sin\frac{\pi}{2}n \Rightarrow x[n] = x^*[-n]$$

پس بدیهی است که $b = 0$ حل توسط پوریا نژادمحمد

$$\Rightarrow a = x[n] * x[n] \Big|_{n=0}$$

$$a=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{|k|}\underbrace{\sin^{2}\frac{\pi}{2}k}$$

تنها به ازاء مقادیر فرد k مقدار +1 دارد.

$\Rightarrow k \longrightarrow 2k+1$

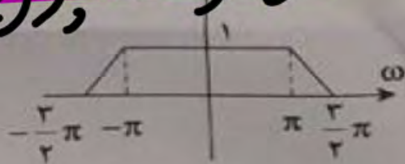
$$=\sum_{k=-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)^{-2k-1}+\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{2k+1}$$

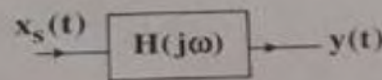
$$=\frac{4}{15}+\frac{16}{60}=\frac{8}{15}$$

۱۰۹- سیگنال $x(t)$ دارای تبدیل فوریه $X(j\omega)$ است، که در شکل زیر نمایش داده‌شده است. سیگنال $x(t)$ با نرخ $\frac{1}{T_s}=1$ نمونه در ثانیه نمونه‌برداری شده، سیگنال $x_s(t)=x(t)\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT_s)$ به دست می‌آید و سیگنال $x_s(t)$ از فیلتر پایین گذر $H(j\omega)$ عبور کرده و خروجی آن را با $y(t)$ نمایش می‌دهیم. نسبت $\frac{y(0)}{x(0)}$، کدام است؟

حل توسط پوریا نژادمحمد

$$H(j\omega)=\begin{cases}1 & |\omega|\le\pi\\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$





۱) $\frac{3}{2}$

۲) $\frac{5}{4}$

۳) ۱

۴) $\frac{4}{5}$

برای اولین بار در چندین سال اخیر از نمونه برداری سؤال آمده است ولی طراحی سؤال به گونه‌ای بود که عملاً وجود نمونه بردار تغییری در جواب مسئله ی بدون نمونه بردار ایجاد نمی‌کند!

$$X_s(\omega)=\frac{1}{T_s}X(\omega)*\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\omega_s)\ ,\ \omega_s=2\pi T_s=2\pi$$

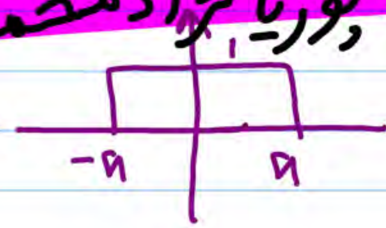
$$\Rightarrow X_s(\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(\omega-2\pi k)\ ,$$

فقط به ازای $k=0$ از فیلتر عبور می‌کند

(همان صورت سوال بدون نمونه برداری)

حل توسط پوریا نژادمحمد

$$\Rightarrow Y(\omega)=$$



$$\Rightarrow \begin{cases} x(0)=\frac{1}{2\pi}\int X(\omega)=\frac{5}{4}\\ y(0)=\frac{1}{2\pi}\int Y(\omega)=1\end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{y(0)}{x(0)}=\frac{4}{5}$$

۱۱۰- فرض کنید سیگنال گسسته زمان متناوب و حقیقی $x[n]$ با دوره تناوب $N=5$ دارای متوسط صفر (یعنی $a_0=0$) است. اگر در بسط سری فوریه این سیگنال دو تا از ضرایب به‌صورت: $a_2=2+j\sqrt{5}$ ، $a_1=-1+j3$ باشد، توان متوسط این سیگنال چقدر است؟

۱) ۳۲
۲) ۳۸ ✓
۳) ۴۴
۴) ۷۸

آسان!

حقیقی $x[n]=x^*[n] \Rightarrow a_k=a^*_{-k}$, $N=5$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1=a_{-4}=a^*_4=-1+j3 \\ a_2=a^*_{-2}=a^*_3=2+j\sqrt{5} \end{cases}$$

$$P=\sum_{k=0}^{4}|a_k|^2=2(10)+2(9)=38$$

۱۱۱- تبدیل فوریه پاسخ ضربه یک سیستم گسسته خطی و تغییر ناپذیر با زمان به‌صورت زیر است.

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega})(3-e^{j\omega})}$$

اگر پاسخ این سیستم به ورودی $x(n)$ که در شکل زیر نمایش داده شده است $y(n)$ باشد، مقدار $\frac{y(1)}{y(0)}$، کدام است؟

۱) $\frac{3}{16}$ ✓

۲) $\frac{5}{16}$

۳) $\frac{\ }{7}$

۴) $\frac{5}{7}$

حل توسط پوریا نژادمحمد

متوسط - محاسباتی.

$$H(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \cdot \frac{-z^{-1}}{1-3z^{-1}} \quad , \quad \frac{1}{2} < |z| < 3$$

$$X(z) = 1 - z^{-2}$$

$$\Rightarrow Y(z) = (z^{-3} - z^{-1}) \overbrace{\left[\frac{-\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{\frac{4}{5}}{1-3z^{-1}} \right]}^{F(z)} , \frac{1}{2} < |z| < 3$$

$$\Rightarrow f[n] = -\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{4}{5}(3)^n u[-n-1]$$

$$\Rightarrow y[n] = f[n-3] - f[n-1]$$

حل توسط پوریا نژادمحمد

$$\Rightarrow \begin{cases} y(0) = f[-3] - f[-1] = -\frac{2}{45} + \frac{2}{5} = \frac{16}{45} \\ y(1) = f[-2] - f[0] = -\frac{2}{15} + \frac{1}{5} = \frac{1}{15} \end{cases} \Rightarrow \frac{y(1)}{y(0)} = \frac{3}{16}$$

۱۱۲- تبدیل لاپلاس پاسخ ضربه یک سیستم خطی و تغییر ناپذیر علّی به‌صورت زیر است. اگر پاسخ این سیستم به ورودی $x(t)=tu(t)$ را با $y(t)$ نمایش دهیم، مقدار $y'(+\infty)$ کدام است؟ ($y'(t)=\frac{d}{dt}y(t)$)

$$H(s)=\frac{s^{2}+3s+2}{(s+3)}$$

$\sigma > -3$
علی

۱) $\frac{3}{2}$
۲) $\frac{7}{9}$
۳) $\frac{2}{3}$
۴) $\frac{2}{9}$

آسان-تکراری!

$$X(s)=\frac{1}{s^{2}} \Rightarrow Y(s)=\frac{s^{2}+3s+2}{s^{2}(s+3)} \quad , \sigma>0$$

$$L\{y'(t)\}=sY(s)=\frac{s^{2}+3s+2}{s(s+3)} \quad , \sigma>0$$

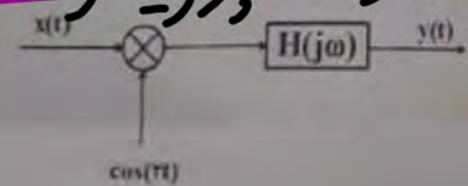
$$sY(s)=1+\frac{2}{s(s+3)} \Rightarrow y'(t)=\delta(t)+\frac{2}{3}u(t)-\frac{2}{3}e^{-3t}u(t)$$

$$\Rightarrow y'(\infty)=\frac{2}{3}$$

راه دوم: از قضیه مقدار نهایی می‌توان استفاده کرد زیرا تابع $s^{2}Y(s)$ محور jω را در ROC اش دارد $(\sigma>-3)$ و دست راستی است.

۱۱۳- سیستم نشان داده شده در شکل زیر را در نظر بگیرید. سیگنال $x(t)=\text{sinc}\left(\frac{t}{\pi}\right)\cos(3t)$ در ورودی این سیستم قرار گرفته و فیلتر $H(j\omega)$ نیز یک فیلتر پایین‌گذر ایدئال با فرکانس قطع a است. مقدار a چقدر انتخاب شود تا انرژی سیگنال خروجی $y(t)$ برابر با ۲۰٪ انرژی سیگنال ورودی باشد؟

حل توسط پوریا نژادمحمد

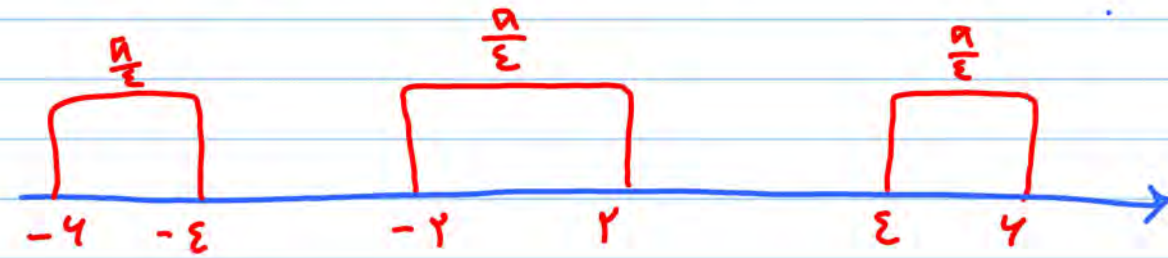


۱) ۰/۴
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۱/۶

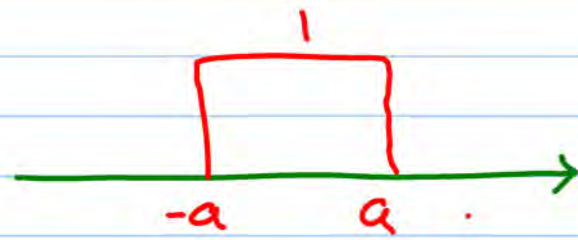
متوسط و خوب! اصلاح شد!

$$x(t)=\frac{\pi}{2}\,\frac{\sin t}{\pi t}\left(\cos 3t+\cos t\right)$$

=



$H(\omega)=$



$$E_x=\frac{1}{2\pi}\int |X(\omega)|^2 d\omega=\frac{\pi}{2}$$

$$E_y=\frac{1}{2\pi}\int |Y(\omega)|^2 d\omega=\frac{1}{5}E_x=\frac{\pi}{10}$$

حل توسط پوریا نژادمحمد

$$E_y=\frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\pi^2}{16}=\frac{\pi}{10}\Rightarrow a=1{,}6$$

۱۱۴- پاسخ سیستم LTI علّی با تابع تبدیل $H(s)=\frac{s}{s+1}$ به ورودی $x(t)=u(t)-e^{-2t}$ را با $y(t)$ نمایش می‌دهیم. مقدار $y(0)$ کدام است؟

۱) ∞ ✓
۲) صفر
۳) -1
۴) ۱

آسان!

$$H(S)=\frac{S}{S+1} \quad , \quad \sigma>-1$$

$$y(t)\Big|_{x=e^{-2t}} = H(-2)\, e^{-2t} = \infty \qquad -2 \notin ROC_H$$

توجه: برخی از داوطلبین درمورد این سوال شک دارند که چرا جواب ∞ می‌شود و چرا $u(t)$ را لحاظ نکردیم؟ خروجی ها درحالت کلی به صورت جمع آنها است و تک تک ورودی ها در آن نقش دارند.

برای اطمینان بیشتر و اثبات زیر را مشاهده کنند.

$$H(S)=\frac{S}{S+1}=1-\frac{1}{S+1} \xrightarrow{\text{علی}} h(t)=\delta(t)-e^{-t}u(t)$$

$$x(t)=u(t)-e^{-2t} \Rightarrow y(t)=\left[\delta(t)-e^{-t}u(t)\right]*\left[u(t)-e^{-2t}\right]$$

$$=u(t)-e^{-2t}-e^{-t}u(t)+e^{-t}u(t)*e^{-2t}$$

$$\Rightarrow y(0)=\frac{1}{2}-1-\frac{1}{2}+\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau}u(\tau)\,e^{+2\tau}=-1+\int_{0}^{\infty} e^{\tau}\,d\tau=\infty$$