سوال ۱

رابطه $x(n)$ ورودی یک سیستم علّی و $y(n)$ خروجی سیستم به‌صورت زیر است:

$$y(n)=\frac{1}{2}\left|y(n-1)\right|+x(n)$$

در مورد پایداری و وارون پذیری این سیستم کدام گزینه درست است؟

۱) سیستم ناپایدار و وارون پذیر است.
۲) سیستم ناپایدار و وارون ناپذیر است.
۳) سیستم پایدار و وارون پذیر است.
۴) سیستم پایدار و وارون ناپذیر است.

مبحث	خواص سیستم
سطح سوال	ساده(با توجه به حل سوال مشابه در کارگاه دوپینگ)
زمان تقریبی حل سوال	۳ دقیقه

حل سوال

بررسی معکوس پذیری: باید x را برحسب y ها بدون ابهام و در عمل از سامانه بتوان بدست آورد.

با توجه به رابطه مقابل، x برحسب y ها در عمل از سامانه بدون ابهام بدست می‌آید لذا معکوس پذیر است. $x[n] = y[n] - \frac{1}{2}|y[n-1]|$

بررسی پایداری: چون رابطه بازگشتی داریم، طبق نکات کلاس، باید بصورت بازگشتی عمل کرد و y را بدست آوریم.

فرض: $x[n] = A$

$$y[n] = \frac{1}{2}|y[n-1]| + A$$

$$y[n-1] = \frac{1}{2}|y[n-2]| + A$$

$$y[n-2] = \frac{1}{2}|y[n-3]| + A$$

$$\vdots$$

$$y[-\infty] = \frac{1}{2}|y[-\infty]| + A$$

$$y[n] = \frac{1}{2}\left|\left|\frac{1}{2}y[n-2]\right| + A\right| + A = \left|\frac{1}{4}|y[n-2]| + \frac{1}{2}A\right| + A$$

$$y[n] = \frac{1}{2}\left|\left|\frac{1}{2}\left(\left|\frac{1}{2}y[n-3]\right| + A\right) + A\right|\right| + A$$

$$= \left|\frac{1}{8}|y[n-3]| + \frac{1}{4}A\right| + \frac{1}{2}A\left| + A\right.$$

$$\vdots$$

حل سوال

$$|a+b+c| \le |a|+|b|+|c|$$

$$y[n] \le |A| + \frac{1}{2}|A| + \frac{1}{4}|A| + \frac{1}{8}|A| + \cdots + \frac{1}{\infty}\left|\cancel{y(-\infty)}^{\,0}\right|$$

$$y[n] \le |A| \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^m = 2|A| < \infty$$

پس $y[n]$ به ازای تمام زمانها محدود بوده و لذا سیستم پایدار است.

در صفحه بعد سوال دوم کارگاه دوبینگ سیگنال آورده شده است که یک هفته قبل از کنکور در سایت لایو آموز برگزار شد!

رابطهٔ ورودی $x(n)$ یک سیستم با خروجی $y[n]$ آن، به‌صورت زیر است.

$$y[n] = ny[n-1] + x(n)$$

گزینهٔ صحیح در مورد این سیستم کدام است؟

۱) ناپایدار و معکوس‌پذیر است.

۲) پایدار و معکوس‌ناپذیر است.

۳) پایدار و معکوس‌پذیر است.

۴) ناپایدار و معکوس‌ناپذیر است.

مبحث	خواص سیستم
سطح سوال	خیلی ساده
زمان تقریبی حل سوال	۱ دقیقه
احتمال تکرار از این مبحث	٪۱۰۰
احتمال تکرار تیپ سوال	خیلی بالا

سوال ۲

سیگنال حقیقی $x(t)$ متناوب با دورهٔ تناوب ۸ با ضرایب سری فوریه a_k بوده و داریم $a_۵ = ۲$. اگر ضرایب سری فوریه سیگنال $y(t) = ۲x(t-۴)$ را b_k بنامیم، کدام گزینه درست است؟

۱) $b_۵ = ۴$
۲) $b_{-۵} = -۲$
۳) $b_۵ = ۲$
۴) $b_{-۵} = -۴$

مبحث	سری فوریه
سطح سوال	ساده
زمان تقریبی حل سوال	۳۰ ثانیه

حل سوال

$x(t) \rightarrow a_k \qquad T_0 = 8 \qquad \omega_0 = \frac{\pi}{4}$

$x(t-4) \rightarrow a_k e^{j4k\omega_0}$

$y(t) = 2x(t-4) \rightarrow 2a_k e^{j4k\omega_0} = b_k$

$$b_k = 2a_k e^{j4k\omega_0} = 2a_k e^{jk\pi}$$

$$b_5 = 2a_5 e^{j5\pi} = -2a_5 = -4$$

$x(t)$ حقیقی است لذا هر شیفتی از آن هم حقیقی است یعنی $y(t)$ هم حقیقی است.

$y(t) = y^*(t)$ حقیقی

$b_k = b^*_{-k}$

$$b_{-5} = (b_5)^* = (-4)^* = -4$$

گزینه ۴ ✓

سوال ۳

سیگنال $x(t)=e^{-t}$ وارد سیستم سببی با پاسخ ضربه $h(t)=e^{-2t}u(t)$ می‌شود. پاسخ سیستم کدام است؟

۱) $y(t)=e^{-t}$ ۲) $y(t)=e^{-2t}$

۳) $y(t)=1$ ۴) $y(t)=e^{-|t|}$

مبحث	تبدیل لاپلاس
سطح سوال	ساده
زمان تقریبی حل سوال	۱۰ ثانیه

حل سوال

نکته گفته شده در کلاس: اگر ورودی e^{at} بدون u باشد خروجی یا همان است یا

e^{at} ضرب عبارت بدون u.

پس چون گزینه‌ها نداریم بدون نیاز به بررسی پایداری، می‌توان گفت که گزینه 1

صحیح است.

سوال ۴

قدار مجموع زیر کدام است؟

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{1+4\pi^2k^2}$$

۱) $\dfrac{1+e^{-1}}{2(1-e^{-1})}$

۲) $\dfrac{3e^{-1}-1}{4(1-e^{-1})}$

۳) $\dfrac{3e^{-1}+1}{2(1-e^{-1})}$

۴) $\dfrac{3e^{-1}+1}{4(1-e^{-1})}$

مبحث	تبدیل و سری فوریه
سطح سوال	دشوار
زمان تقریبی حل سوال	۵ دقیقه

حل سوال

$$I = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+4\pi^2 k^2}$$

شبیه فرم تبدیل فوریه است پس باید
از تبدیل فوریه به خوبی استفاده کنیم.

$$e^{a|t|} \xrightarrow{a<0} \frac{2a}{a^2+w^2}$$

چون سیگما دارای حد ∞ است پس سؤال درمورد سری فوریه سیگنال پیوسته است.
و تعریف سری را می نویسیم.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jkw_0 t}$$

$$x(t) \longrightarrow a_k = \frac{1}{1+4\pi^2 k^2}$$

جای x را خالی گذاشتیم.

$$f(t) \longrightarrow F(jw)$$

از خاصیت تبدیل و سری استفاده می کنیم.

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} f(t-mT_0) \;,\; T_0 \longrightarrow a_k = \frac{1}{T_0} F(jkw_0) \quad ; \; w_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$e^{-|t|} \longrightarrow \frac{2}{1+w^2}$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-|t-mx|} \longrightarrow a_k = \frac{2}{1+k^2 \times \underbrace{4\pi^2}_{w_0^2}}$$

حل سوال

$$x(t)=\frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-|t-m|} \longrightarrow b_k=\frac{1}{1+4\pi^2k^2} \quad ; \quad \omega_0=2\pi$$

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+4\pi^2k^2}e^{jk2\pi t}$$

$$x(0)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\underbrace{\frac{1}{1+4\pi^2k^2}}_{b_k}=b_0+2\sum_{k=1}^{\infty}b_k$$

چون b_k متقارن زوج است.

$$x(0)=1+2\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1+4\pi^2k^2}}_{I}$$

$$I=\frac{1}{2}x(0)-\frac{1}{2}$$

$$x(t)=\frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{-|t-m|} \qquad x(0)=\frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{-|m|}$$

متقارن زوج است

$$x(0)=\frac{1}{2}\left(e^{-|0|}+2\sum_{m=1}^{\infty}e^{-m}\right)=\frac{1}{2}+\frac{e^{-1}}{1-e^{-1}}$$

$$I=\frac{1}{2}x(0)-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{e^{-1}}{2-2e^{-1}}-\frac{1}{2}=\frac{e^{-1}}{2(1-e^{-1})}-\frac{1}{4}$$

$$I=\frac{2e^{-1}-1+e^{-1}}{4(1-e^{-1})}=\frac{3e^{-1}-1}{4(1-e^{-1})}$$

گزینه ۲

سوال ۵

معادله تفاضلی یک سیستم LTI با پاسخ دست چپی (left sided) به‌صورت زیر است؟

$$y[n]+3y(n-1)+2y[n-2]=x[n]$$

اگر خروجی سیستم به ورودی $x(n)=\delta[n-2]$ را با $y(n)$ نمایش دهیم در این صورت مقدار $y(0)+y(1)+y(2)$ کدام است؟

۱) صفر

۲) $\frac{1}{2}$

۳) -2

۴) $\frac{1}{4}$

مبحث	تبدیل z
سطح سوال	ساده
زمان تقریبی حل سوال	۲ دقیقه

حل سوال

معادله تفاضلی یعنی از تبدیل z باید حل کنیم.

$$y[n]+3y[n-1]+2y[n-2]=x[n]$$

$$Y(z)+3z^{-1}Y(z)+2z^{-2}Y(z)=X(z)$$

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1}{1+3z^{-1}+2z^{-2}}\ ; \quad |z|<1$$ ضد علی

$$x[n]=\delta[n-2] \longrightarrow X(z)=z^{-2}$$

$$\Rightarrow Y(z)=\frac{z^{-2}}{1+3z^{-1}+2z^{-2}} \Rightarrow$$ برای محاسبه $y[n]$، $Y(z)$ را به کسرها جزئی ساده تبدیل می‌کنیم.

$$Y(z)=\frac{1}{(z+1)(z+2)}=\frac{1}{z+1}-\frac{1}{z+2}\ ; \quad |z|<1$$

$$Y(z)=\frac{z^{-1}}{1+z^{-1}}-\frac{z^{-1}}{1+2z^{-1}}$$

$$\frac{1}{1+z^{-1}} \longrightarrow -(-1)^n u[-n-1]$$ ضد علی

$$\frac{1}{1+2z^{-1}} \longrightarrow -(-2)^n u[-n-1]$$ 〃 〃

$$\frac{z^{-1}}{1+z^{-1}} \longrightarrow -(-1)^{n-1} u[-n]$$

$$\frac{z^{-1}}{1+2z^{-1}} \longrightarrow -(-2)^{n-1} u[-n]$$

حل سوال

$$y[n] = -(-1)^{n-1} u[-n] + (-2)^{n-1} u[-n]$$

$$y[0] = +1 + \frac{-1}{2} = \frac{1}{2}$$

گزینه ۲

$$y[1] = y[2] = 0$$

سوال ۶

یگنال زمان گسسته $x[n]=\begin{cases}0 & n \text{ زوج} \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}(j)^n, & n \text{ فرد}\end{cases}$ را با تبدیل فوریه $X(e^{j\omega})$ در نظر می‌گیریم . اگر

$$a \triangleq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{Re}\left[X^2(e^{j\omega})\right]d\omega$$

$$b \triangleq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{Im}\left[X^2(e^{j\omega})\right]d\omega$$

. آن صورت مقادیر a و b کدام است؟

($b=\frac{8}{15}, a=0$

($b=\frac{8}{6}, a=0$

($b=0, a=\frac{8}{15}$

($b=0, a=\frac{8}{6}$

مبحث	تبدیل فوریه
سطح سوال	دشوار
زمان تقریبی حل سوال	۳ دقیقه

حل سوال

باید سعی کنیم از تعریف تبدیل فوریه حل کنیم.

$f(n) \longrightarrow F(j\omega) \qquad f(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(j\omega)\, e^{+j\omega t}\, d\omega$

$$f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(j\omega)\, d\omega$$

$$Re\{x^2(j\omega)\} = \frac{1}{2}X^2(j\omega) + \frac{1}{2}\left(X^2(j\omega)\right)^*$$

$$\Rightarrow a = \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}X^2(j\omega)\, d\omega}_{A_1} + \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\left(X^2(j\omega)\right)^* d\omega}_{A_2}$$

$$f[n] = x[n] * x[n] \longrightarrow X^2(j\omega) = F(j\omega)$$

$$A_1 = \frac{1}{2}\left(x[n] * x[n]\Big|_{n=0}\right) = \frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\, x[-m]$$

$$A_1 = \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{m_1=-\infty}^{\infty}}_{\text{زوج}} x[m_1]\, x[-m_1] + \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{m_2=-\infty}^{\infty}}_{\text{فرد}} x[m_2]\, x[-m_2]$$

$$A_1 = 0 + \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{m_2=-\infty}^{\infty}}_{\text{فرد}} \left(\frac{1}{2}\right)^{|m_2|} \cancel{(j)^{m_2}} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{|-m_2|} \cancel{(j)^{(-m_2)}}$$

$$A_1 = \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{m_2=-\infty}^{\infty}}_{\text{فرد}} \left(\frac{1}{4}\right)^{|m_2|} = \underbrace{\sum_{m_2=0}^{\infty}}_{\text{فرد}} \left(\frac{1}{4}\right)^{m_2}$$

$$A_1 = \sum_{m_2=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{2m_2+1} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{16}}\right) = \frac{4}{15}$$

حل سوال

$$f[n] = x[n] * x[n] \longrightarrow X^2(j\omega)$$

$$f^*[-n] \longrightarrow (X^2(j\omega))^*$$

$$A_2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(X^2(j\omega))^* \, d\omega = f^*[0] = (f[0])^*$$

$$A_2 = \frac{1}{2}\left(x[n] * x[n] \Big|_{n=0} \right)^* = \frac{1}{2}\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]x[-m] \right)^*$$

$$A_2 = \left(\frac{4}{15} \right)^*$$

$$a = A_1 + A_2 = \frac{8}{5}$$

$$\mathrm{Im}\{X^2(j\omega)\} = \frac{1}{2j}X^2(j\omega) - \frac{1}{2j}(X^2(j\omega))^*$$

$$b = \frac{1}{2j}\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X^2(j\omega)\, d\omega}_{A_1} - \frac{1}{2j}\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int (X^2(j\omega))^* \, d\omega}_{A_2}$$

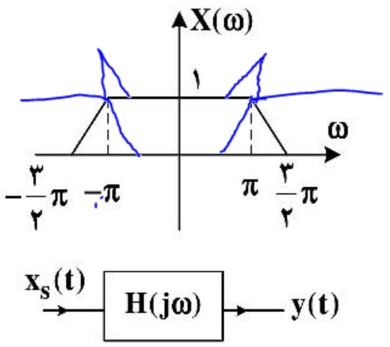
$b = 0$ گزینه ۳ ✓

$X(j\omega) * \sum \delta(\omega - 2\pi k)$

سوال ۷

سیگنال $x(t)$ دارای تبدیل فوریه $X(j\omega)$ است، که در شکل زیر نمایش داده‌شده است. سیگنال $x(t)$ با نرخ $\frac{1}{T_s} = 1$ نمونه در ثانیه نمونه‌برداری شده، سیگنال $x_s(t) = x(t)\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT_s)$ به دست می‌آید و سیگنال $x_s(t)$ از فیلتر پایین گذر $H(j\omega)$ عبور کرده و خروجی آن را با $y(t)$ نمایش می‌دهیم. نسبت $\frac{y(0)}{x(0)}$، کدام است؟

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \le \pi \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$



۱) $\frac{5}{4}$

۲) $\frac{4}{5}$

۳) $\frac{3}{2}$

۴) ۱

مبحث	تبدیل فوریه
سطح سوال	متوسط
زمان تقریبی حل سوال	۳ دقیقه

حل سوال

$$Y(j\omega) = H(j\omega)\, X_s(j\omega)$$

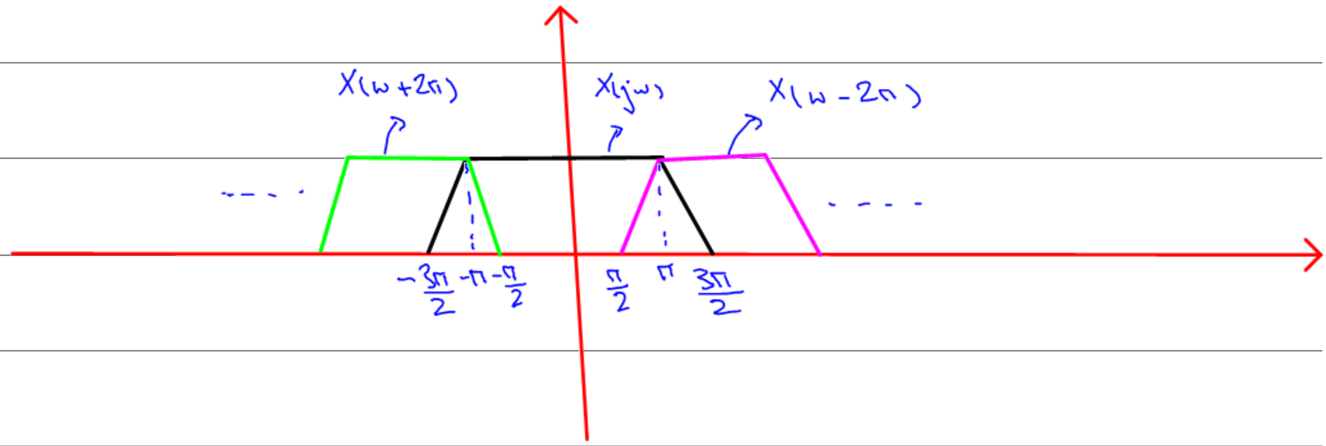
$$x_s(t) = x(t) \times \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT_s) \qquad \frac{1}{T_s}=1 \Rightarrow T_s = 1$$

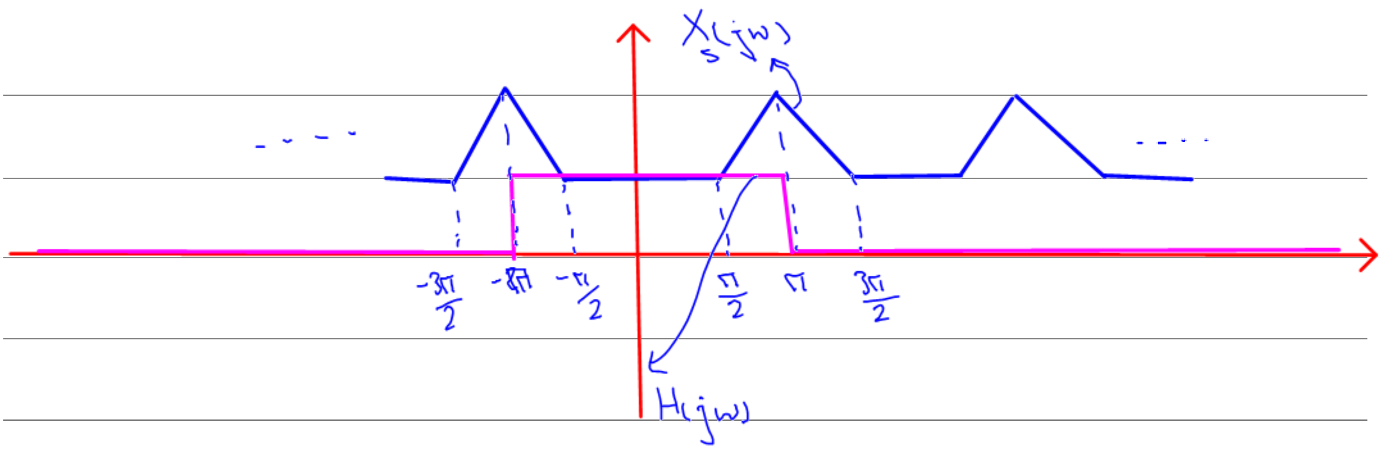
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-k) \longrightarrow 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0) \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$$

$$X_s(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k2\pi)$$

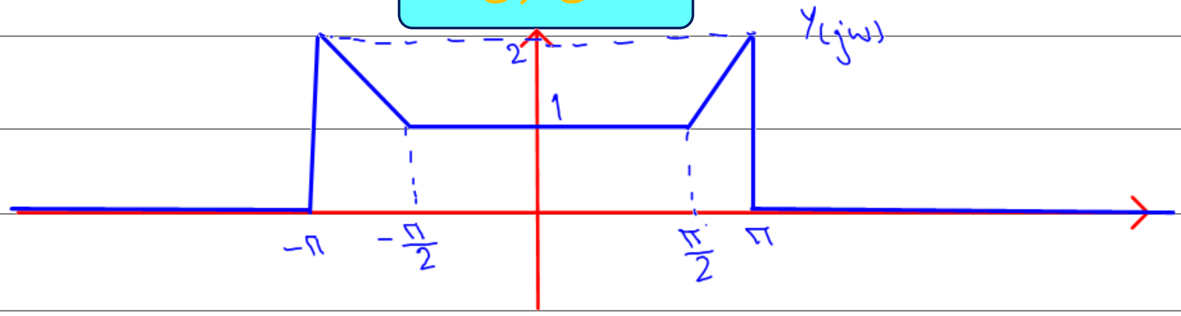
$$X_s(j\omega) = X(j\omega) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - 2\pi k))$$

$$= X(j\omega) + X(j(\omega - 2\pi)) + \cdots$$





حل سوال



$$y(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Y(jw)\,dw = \frac{1}{2\pi}\left(2\pi + \pi/2\right) = 1.25$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(jw)\,dw = \frac{1}{2\pi}\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1.25$$

$$\frac{y(n)}{x(n)} = 1$$ گزینه ۴ ✓

سوال ۸

فرض کنید سیگنال گسسته زمان متناوب و حقیقی $x[n]$ با دوره تناوب $N = ۵$ دارای متوسط صفر (یعنی $a_0 = 0$) است. اگر در بسط سری فوریه این سیگنال دو تا از ضرایب به‌صورت: $a_2 = 2 + j\sqrt{5}$,$a_1 = -1 + j3$ باشد، توان متوسط این سیگنال چقدر است؟

۱) ۳۸
۲) ۷۸
۳) ۳۲
۴) ۴۴

مبحث	تبدیل فوریه
سطح سوال	ساده
زمان تقریبی حل سوال	۲ دقیقه

حل سوال

① $x[n]$ حقیقی $\qquad a_k = a_{-k}^* \;;\; a_k^* = a_{-k}$

② $a_0 = 0 \qquad$ ③ $a_2 = 2+j\sqrt{5} \;,\; a_1 = -1+j3$

$$P_x = \sum_{k=\langle N\rangle} |a_k|^2$$ پارسوال

$$P_x = \sum_{k=-2}^{2} |a_k|^2 = |a_{-2}|^2 + |a_{-1}|^2 + |a_0|^2 + |a_1|^2 + |a_2|^2$$

باید a_{-2} و a_{-1} را حساب کنیم.

①, ③ $\longrightarrow \quad a_{-1} = a_1^* = -1-j3 \qquad a_{-2} = a_2^* = 2-j\sqrt{5}$

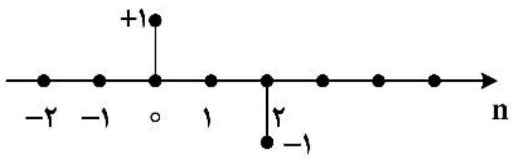
$$P_x = 9 + 10 + 0 + 10 + 9 = 38 \checkmark$$

سوال ۹

تبدیل فوریه پاسخ ضربه یک سیستم گسسته خطی و تغییر ناپذیر با زمان به‌صورت زیر است.

$$H(e^{j\omega}) = \frac{۱}{(۱-\frac{۱}{۲}e^{-j\omega})(۳-e^{j\omega})}$$

اگر پاسخ این سیستم به ورودی $x(n)$ که در شکل زیر نمایش داده شده است $y(n)$ باشد، مقدار $\frac{y(۱)}{y(۰)}$، کدام است؟



۱) $\frac{۵}{۱۶}$

۲) $\frac{۵}{۷}$

۳) $\frac{۳}{۱۶}$

۴) $\frac{۳}{۷}$

مبحث	تبدیل z
سطح سوال	متوسط
زمان تقریبی حل سوال	۲ دقیقه

$$x[n] = \delta[n] - \delta[n-2] \qquad y[n] = x[n] * h[n]$$

$$y[n] = h[n] - h[n-2]$$

چون تبدیل فوریه دارد حتماً ROC شامل دایره واحد می شود.

$$H(j\omega) = \frac{1}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega})(3-e^{-j\omega})}$$

$$H(z) = H(j\omega)\Big|_{e^{j\omega}=z} = \frac{1}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(3-z)} \; ; \; \frac{1}{2} < |z| < 3$$

$$H(z) = \frac{-z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-3z^{-1})} = \frac{2/5}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{2/5}{1-3z^{-1}}$$

$$h[n] = \frac{2}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{2}{5}\,3^n u[-n-1]$$

$$y[1] = h[1] - h[-1] = \frac{1}{5} - \frac{2}{15} = \frac{1}{15}$$

$$y[0] = h[0] - h[-2] = \frac{2}{5} - \frac{2}{45} = \frac{16}{45}$$

$$\frac{y[1]}{y[0]} = \frac{3}{16} \checkmark$$

سوال ۱۰

تبدیل لاپلاس پاسخ ضربه یک سیستم خطی و تغییر ناپذیر علّی به‌صورت زیر است. اگر پاسخ این سیستم به ورودی $x(t)=tu(t)$ را با $y(t)$ نمایش دهیم، مقدار $y'(+\infty)$ کدام است؟ ($y'(t)=\frac{d}{dt}y(t)$)

$$H(s)=\frac{s^{۲}+۳s+۲}{(s+۳)}$$

۱) $\frac{۷}{۹}$

۲) $\frac{۲}{۹}$

۳) $\frac{۳}{۲}$

۴) $\frac{۲}{۳}$

مبحث	تبدیل لاپلاس
سطح سوال	ساده
زمان تقریبی حل سوال	۲ دقیقه

حل سوال

$$Y(s) = H(s)\,X(s) \qquad f = y'(t) \longrightarrow sY(s) = F(s)$$

$$y'(\infty) = \lim_{s\to 0} s\,F(s) = \lim_{s\to 0} s\,(sY(s))$$

$$Y(s) = H(s) \times \frac{1}{s^2} \quad \Rightarrow \quad y'(\infty) = \lim_{s\to 0} s^2\, H(s)\, \frac{1}{s^2} = H(0)$$

$$= \frac{2}{3} \checkmark$$

سوال ۱۱

پاسخ سیستم LTI علّی با تابع تبدیل $H(s)=\frac{s}{s+1}$ به ورودی $x(t)=u(t)-e^{-2t}$ را با $y(t)$ نمایش می‌دهیم. مقدار $y(0)$ کدام است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ∞
۴) -1

مبحث	تبدیل لاپلاس
سطح سوال	ساده
زمان تقریبی حل سوال	۱ دقیقه

حل سوال

علّی $\Rightarrow$ ROC_H دست‌راستی $\Rightarrow$ $H(s) = \frac{s}{s+1}\ ;\ Re(s) > -1$

$$u(t) \longrightarrow \boxed{H(s)} \longrightarrow y_1(t)$$

$$e^{-2t} \longrightarrow \boxed{H(s)} \longrightarrow y_2(t)$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow y(t) = y_1(t) - y_2(t)$$

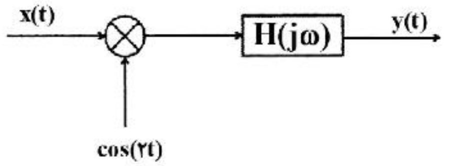
$$e^{-2t} \longrightarrow y_2(t) = \begin{cases} \infty & -2 \notin ROC_H \\ H(-2)\, e^{-2t} & -2 \in ROC_H \end{cases}$$

$$-2 \notin ROC_H = Re(s) > -1 \Rightarrow y_2(t) = \infty$$

$y(t) = y_1(t) - \infty = \infty$ گزینه ۳ ✓

سوال ۱۲

سیستم نشان داده شده در شکل زیر را در نظر بگیرید. سیگنال $x(t)=\mathrm{sinc}\left(\frac{t}{\pi}\right)\cos(3t)$ در ورودی این سیستم قرار گرفته و فیلتر $H(j\omega)$ نیز یک فیلتر پایین‌گذر ایدئال با فرکانس قطع a است. مقدار a چقدر انتخاب شود تا انرژی سیگنال خروجی $y(t)$ برابر با ۲۰٪ انرژی سیگنال ورودی باشد؟



۱) ۱

۲) ۱/۶

۳) ۰/۴

۴) ۲

مبحث	تبدیل فوریه
سطح سوال	دشوار
زمان تقریبی حل سوال	۳ دقیقه

حل سوال

$$Y(j\omega) = H(j\omega) \times F(j\omega) \quad ; \quad f(t) = x(t)\cos(2t) \longrightarrow F(j\omega)$$

$$x(t) = \mathrm{sinc}\left(\frac{t}{\pi}\right)\left(\frac{1}{2}e^{j3t} + \frac{1}{2}e^{-j3t}\right)$$

$$\mathrm{sinc}\left(\frac{t}{\pi}\right) \longrightarrow \pi\,\Pi\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$\frac{1}{2}e^{j3t}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{t}{\pi}\right) \longrightarrow \frac{\pi}{2}\,\Pi\left(\frac{\omega-3}{2}\right)$$

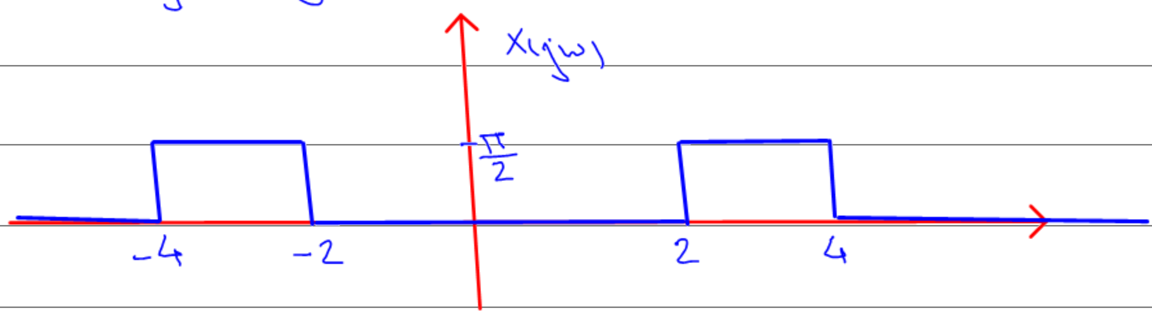
$$+\ \frac{1}{2}e^{-j3t}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{t}{\pi}\right) \longrightarrow \frac{\pi}{2}\,\Pi\left(\frac{\omega+3}{2}\right)$$

$$x(t) \longrightarrow X(j\omega) = \frac{\pi}{2}\left(\Pi\left(\frac{\omega-3}{2}\right) + \Pi\left(\frac{\omega+3}{2}\right)\right)$$

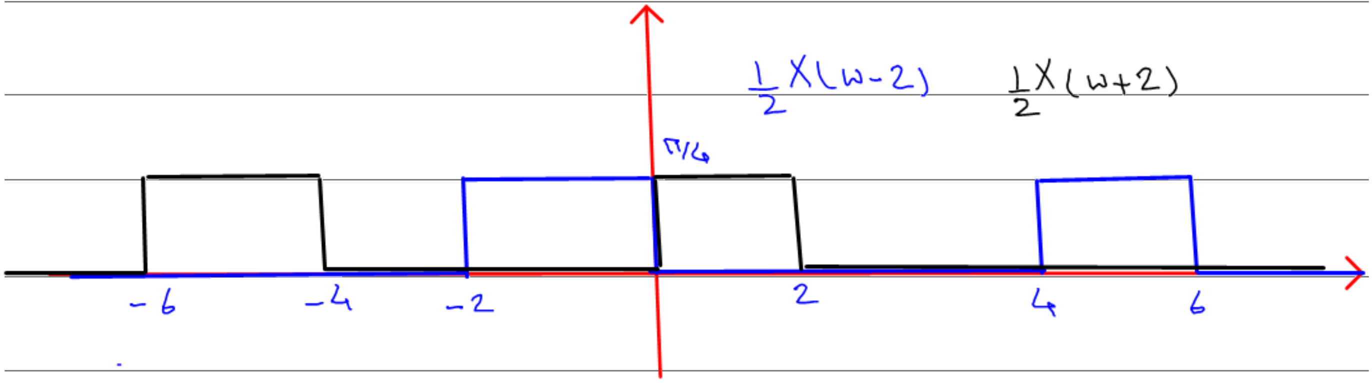
$$f(t) = \frac{1}{2}x(t)e^{j2t} + \frac{1}{2}x(t)e^{-j2t}$$

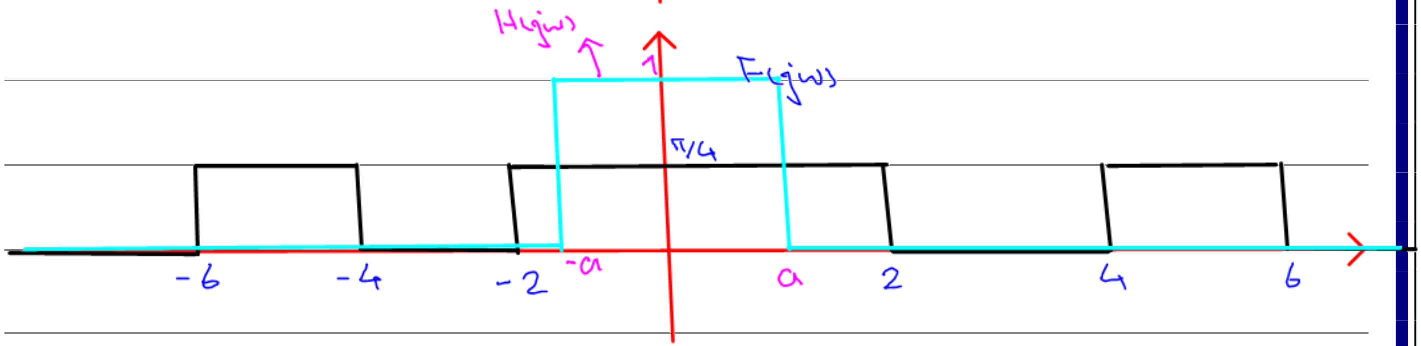
$$F(j\omega) = \frac{1}{2}X(\omega-2) + \frac{1}{2}X(\omega+2)$$

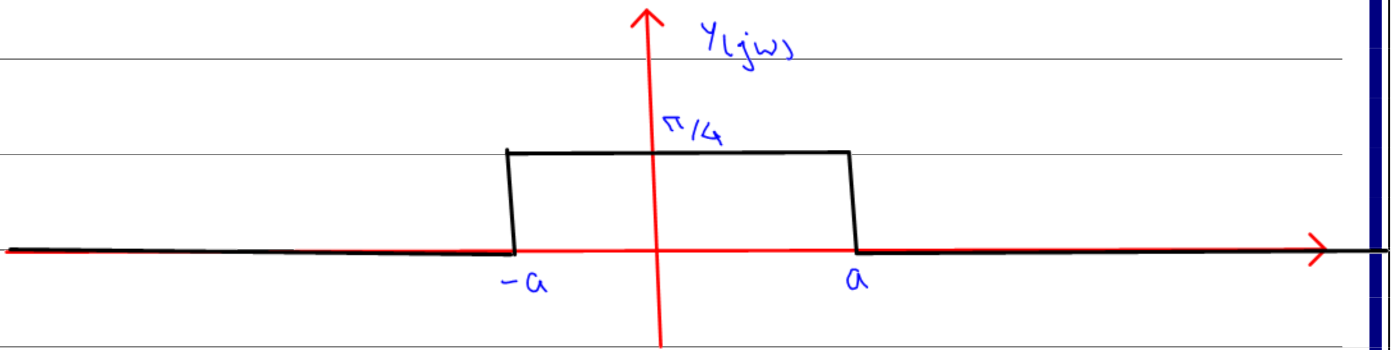
$$Y(j\omega) = H(j\omega)F(j\omega)$$



حل سوال







$$E_x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 \, d\omega$$ پارسوال

$$E_x = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi^2}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$E_y = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |Y(j\omega)|^2 \, d\omega = \frac{1}{2\pi}\left(2a \times \frac{\pi^2}{16}\right)$$

$$E_y = 0.2\,E_x \longrightarrow \frac{a\pi}{16} = 0.2\frac{\pi}{2} \longrightarrow a = 1.6 \checkmark$$