سوال۱) به ازای کدام مقدار مثبت a , شعاع همگرایی پاسخ سری معادله دیفرانسیل $(x^2+a^2)y''+2xy'+4x^2y=0$ در اطراف نقطه $x=\frac{-3}{2}$ برابر $R=\frac{5}{2}$ خواهد بود؟

۱) 2

۲) 4

۳) 1

۴) 3

- شعاع همگرایی جواب به صورت سری توانی حول نقطه عادی x :

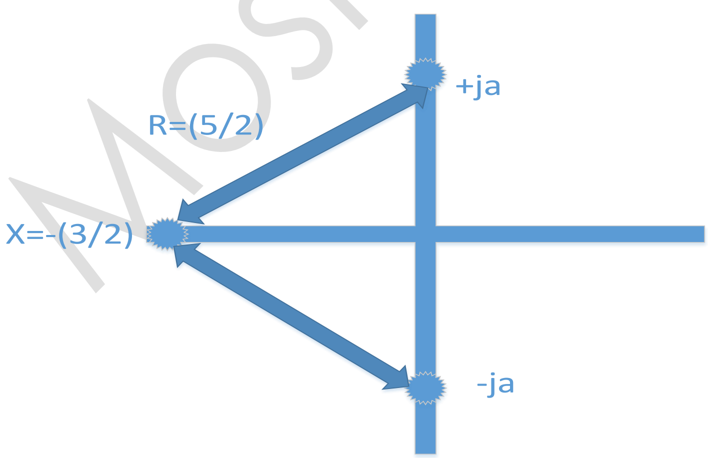
۱) نقاط تکین معادله را به دست می آوریم.

۲) فاصله نقطه عادی x از تمام نقاط تکین را به دست می آوریم.

۳) کمترین فاصله به دست آمده در قسمت ۲ همان حداقل شعاع همگرایی است.

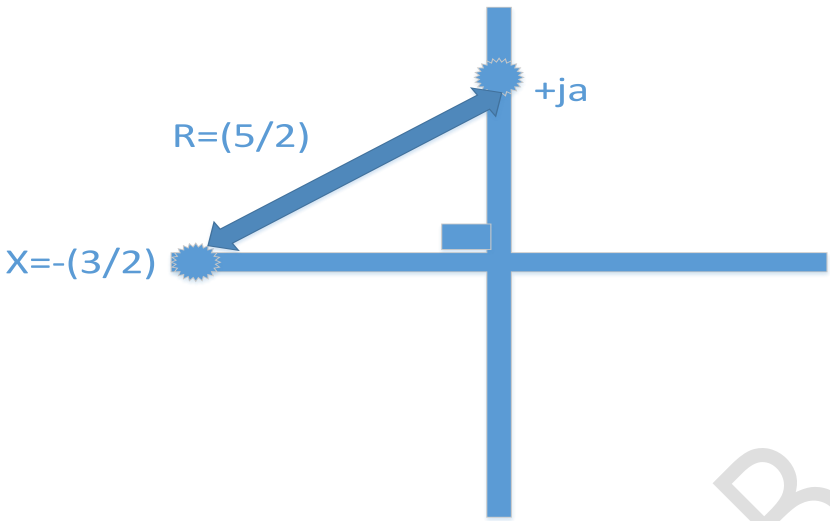
با توجه به معادله دیفرانسیل داده شده نقاط تکین برابر است با:

$$x^2+a^2=0\rightarrow x=\pm ja$$



بالاخره یه جا قضیه فیثاغورس به درد خورد ☺

- با استفاده از قضیه فیثاغورس داریم:



$$R^2 = X^2 + a^2 \rightarrow \frac{25}{4} = \frac{9}{4} + a^2 \rightarrow a = 2$$

گزینه ۱ جواب صحیح است.
کلید سنجش هم گزینه ۱ را انتخاب کرده است!
سطح سوال آسان.

سوال۲) جواب عمومی معادله دیفرانسیل $(x-y)^2 y' = 4$ **کدام است؟**

۱) $$y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x-y+2}{x-y-2}\right)+c$$

۲) $$y = \ln\left(\frac{x-y+2}{x-y-2}\right)+c$$

۳) $$y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x-y-2}{x-y+2}\right)+c$$

۴) $$y = \ln\left(\frac{x-y-2}{x-y+2}\right)+c$$

- **اگر به گزینه ها نگاه کنیم مشاهده می کنیم که عبارت** $x-y$ **در تمامی گزینه ها تکرار شده است. بنابراین یکی از راه حل های این سوال این است که از تغییر متغیر به صورت زیر استفاده کنیم:**

$$z = x-y \rightarrow \frac{d}{dx} \rightarrow \frac{dz}{dx} = 1-y' \rightarrow y' = 1-\frac{dz}{dx}$$

- عبارت $y^{'} = 1 - \frac{dz}{dx}$ را داشته باشید. باهاش کار داریم!
- با جایگذاری تغییر متغیر در نظر گرفته شده در معادله دیفرانسیل داده شده, خواهیم داشت:

$$(z)^2(1 - \frac{dz}{dx}) = 4$$

$$(z)^2(\frac{dx - dz}{dx}) = 4 \rightarrow z^2dx - z^2dz = 4dx$$

$$(z^2 - 4)dx = z^2dz \rightarrow dx = \frac{z^2}{z^2 - 4}dz$$

- با کمی دقت به عبارت حاصل شده مشاهده می شود که می توان صورت کسر را به همانند کسر تبدیل کرد. چگونه؟

$$dx = \frac{z^2 - 4 + 4}{z^2 - 4}dz$$

$$dx = \left(\frac{z^2 - 4}{z^2 - 4} + \frac{4}{z^2 - 4}\right)dz = \left(1 + \frac{4}{z^2 - 4}\right)dz$$

- برای ادامه حل قاعدتا" باید انتگرال بگیریم. اما با کمی توجه مشاهده می شود که می توان از تفکیک کسر برای عبارت سمت راست تساوی استفاده کرد:

$$\frac{4}{z^2-4}=\frac{4}{(z-2)(z+2)}=\frac{A}{z-2}+\frac{B}{z+2}$$

$$A=\lim_{z\to 2}\frac{4}{z+2}=1 \qquad B=\lim_{z\to -2}\frac{4}{z-2}=-1$$

$$dx=\left(1+\frac{1}{z-2}+\frac{-1}{z+2}\right)dz$$

- **حالا بریم واسه انتگرال گیری!**

$$\int \to x=z+\ln(z-2)-\ln(z+2)$$

$$x=z+\frac{\ln(z-2)}{\ln(z+2)}$$

- **تغییر متغیرمون چی بود؟**

$$z=x-y$$

$$x=x-y+\frac{\ln(x-y-2)}{\ln(x-y+2)}$$

$$y=\frac{\ln(x-y-2)}{\ln(x-y+2)}$$

گزینه ۴ جواب صحیح است.
کلید سنجش هم گزینه ۴ را انتخاب کرده است!
سطح سوال متوسط.
حل سوال خیلی کمتر می توانست باشد ولی برای معلوم بودن مراحل طی شده, سعی شد تمامی مراحل نوشته شود.

سوال۳) جواب معادله انتگرال $y' - 3y - 2\int_0^x y(t)dt = u_2(x)$ **با شرط اولیه** $y(0) = 0$ **کدام است؟ (u تابع پله است)**

۱) $\frac{2\sqrt{17}}{17} u_2(t) e^{\frac{3}{2}t-3} \cosh\left(\frac{\sqrt{17}}{2}(t-2)\right)$

۲) $\frac{2\sqrt{17}}{17} u_2(t) e^{\frac{3}{2}t-3} \sinh\left(\frac{\sqrt{17}}{2}(t-2)\right)$

۳) $\frac{2\sqrt{17}}{17} u_2(t) e^{\frac{-3}{2}t+3} \cosh\left(\frac{\sqrt{17}}{2}(t-2)\right)$

۴) $\frac{2\sqrt{17}}{17} u_2(t) e^{\frac{-3}{2}t+3} \sinh\left(\frac{\sqrt{17}}{2}(t-2)\right)$

- معادله انتگرالی است. در مالتی مدیا بارها تکرار شده است که زمانی که با معادله انتگرالی سروکار دارید. قسمت انتگرالی یا تعریف کانوولوشن است یا یکی از خواص تبدیل لاپلاس و برای حل این سوالات باید از تبدیل لاپلاس استفاده کنیم.
- نکته دیگر که در مالتی مدیا بارها به آن اشاره کردم این بود که به گزینه ها دقت کنید. تمامی گزینه ها اگر عبارت سینوسی یا هایپربولیک داشتند. در هنگام گرفتن تبدیل لاپلاس باید مخرج موجود در عبارت لاپلاسی را با توجه به گزینه ها به شکل مورد نظر در آوریم.
- قبل از حل, می دانیم که:

$$L(\sin at)=\frac{a}{s^2+a^2},,L(\sinh at)=\frac{a}{s^2-a^2}$$

- در قدم اول از طرفین معادله داده شده تبدیل لاپلاس می گیریم:

$$L(y^{'})=sY(s)-y(0)$$

$$L(\int_0^x y(t)dt)=\frac{Y(s)}{s}$$

$$L(u_2(x))=L(u(x-2))=\frac{1}{s}e^{-2s}$$

$$\to sY(s)-(y(0)=0)-3Y(s)-2\frac{Y(s)}{s}=\frac{e^{-2s}}{s}$$

$$\times s\to s^2Y(s)-3sY(s)-2Y(s)=e^{-2s}$$

$$[s^2-3s-2]Y(s)=e^{-2s}\to Y(s)=\frac{e^{-2s}}{s^2-3s-2}$$

- با توجه به گزینه ها به عنوان مثال عبارت $\sinh\left(\frac{\sqrt{17}}{2}t\right)$ را در نظر بگیرید. تبدیل لاپلاس این عبارت برابر است با:

$$L(\sinh\left(\frac{\sqrt{17}}{2}t\right)) = \frac{\frac{\sqrt{17}}{2}}{s^2 - \frac{17}{4}}$$

- دقت کنید که اگر cosh را هم در نظر می گرفتیم, پس از تبدیل لاپلاس باید. مخرج آن باید همانند مخرج عبارت حاصل شده در رابطه آخر باشد.

- در مرحله بعدی باید مخرج عبارت حاصل شده $Y(s) = \frac{e^{-2s}}{s^2 - 3s - 2}$ را به عبارتی مشابه با عبارت حاصل شده در مخرج عبارت $L(\sinh\left(\frac{\sqrt{17}}{2}t\right)) = \frac{\frac{\sqrt{17}}{2}}{s^2 - \frac{17}{4}}$ تبدیل کنیم.

$$Y(s) = \frac{e^{-2s}}{s^2 - 3s - 2} = e^{-2s}.\frac{1}{s^2 - 3s - 2 + \frac{9}{4} - \frac{9}{4}}$$

$$Y(s) = e^{-2s}.\frac{1}{(s^2 - 3s + \frac{9}{4}) - 2 - \frac{9}{4}} = e^{-2s}.\frac{1}{(s - \frac{3}{2})^2 - \frac{17}{4}}$$

- برای تبدیل لاپلاس معکوس گرفتن از رابطه حاصل باید ابتدا هسته عبارت مورد نظر را در نظر بگیریم و تبدیل لاپلاس معکوس آن را به دست آوریم:

$$Y(s)=\frac{2}{\sqrt{17}}\times\frac{\frac{\sqrt{17}}{2}}{s^2-\frac{17}{4}}\to L^{-1}\to y(t)=\frac{2}{\sqrt{17}}\sinh\left(\frac{\sqrt{17}}{2}t\right)$$

$$Y(s)=\frac{2}{\sqrt{17}}\times\frac{\frac{\sqrt{17}}{2}}{(s-\frac{3}{2})^2-\frac{17}{4}}\to L^{-1}\to y(t)=\frac{2}{\sqrt{17}}e^{\frac{3}{2}t}\sinh\left(\frac{\sqrt{17}}{2}t\right)$$

$$Y(s)=\frac{2}{\sqrt{17}}\times\frac{\frac{\sqrt{17}}{2}e^{-2s}}{(s-\frac{3}{2})^2-\frac{17}{4}}\to L^{-1}\to y(t)=\frac{2}{\sqrt{17}}e^{\frac{3}{2}(t-2)}\sinh\left(\frac{\sqrt{17}}{2}(t-2)\right)u(t-2)$$

$$Y(s)=\frac{2}{\sqrt{17}}\times\frac{\frac{\sqrt{17}}{2}e^{-2s}}{(s-\frac{3}{2})^2-\frac{17}{4}}\to L^{-1}\to y(t)=\frac{2}{\sqrt{17}}e^{\frac{3}{2}t-3}\sinh\left(\frac{\sqrt{17}}{2}(t-2)\right)u_2(t)$$

$$y(t)=\frac{2\sqrt{17}}{17}e^{\frac{3}{2}t-3}\sinh\left(\frac{\sqrt{17}}{2}(t-2)\right)u_2(t)$$

گزینه ۲ جواب صحیح است.

کلید سنجش هم گزینه ۲ را انتخاب کرده است!

سطح سوال متوسط رو به بالا!

حل سوال خیلی کمتر می توانست باشد ولی برای معلوم بودن مراحل طی شده, سعی شد تمامی مراحل نوشته شود.

سوال۴) لاپلاس وارون تابع $F(s)=\dfrac{1}{2^s\sqrt{2s+1}}$ **برای** $t>\ln 2$ **کدام است؟**

(راهنمایی: $\Gamma(x)$ **تابع گاما است و** $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$)

۱) $\dfrac{e^{\frac{-1}{2}(t-\ln 2)}}{\sqrt{2\pi t}}$

۲) $\dfrac{e^{\frac{-1}{2}(t-\ln 2)}}{\sqrt{2(t-\ln 2)}}$

۳) $$\frac{e^{\frac{-t}{2}}}{\sqrt{\pi(t-\ln 2)}}$$

۴) $$\frac{e^{\frac{-t}{2}}}{\sqrt{2\pi(t-\ln 2)}}$$

- این سوال مشابه سوال درس معادلات در رشته ریاضی محض سال ۸۸ است که در مالتی مدیا روش حل توضیح داده شده است.

در مرحله اول تابع داده شده را به صورت زیر بازنویسی می کنیم:

$$F(s)=\frac{1}{2^{s}\sqrt{2s+1}}=\frac{2^{-s}}{\sqrt{2s+1}}=\frac{e^{\ln 2^{-s}}}{\sqrt{2s+1}}=\frac{e^{-s\ln 2}}{\sqrt{2s+1}}=\frac{e^{-s\ln 2}}{\sqrt{2}\sqrt{s+\frac{1}{2}}}$$

در عبارت حاصل ابتدا تبدیل لاپلاس معکوس عبارت هسته را به دست می آوریم:

$$F(s)=\frac{1}{\sqrt{s}}\rightarrow L^{-1}\rightarrow ?$$

برای به دست آوردن تبدیل لاپلاس معکوس از رابطه زیر استفاده خواهیم کرد:

$$L(x^{p})=\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}},\, p>-1$$

$$L(t^{p})=\frac{\Gamma(p+1)}{s^{\frac{1}{2}}}\rightarrow p+1=\frac{1}{2}\rightarrow p=-\frac{1}{2}$$

$$L(t^{\frac{-1}{2}})=\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{s^{\frac{1}{2}}}=\frac{\sqrt{\pi}}{s^{\frac{1}{2}}}\rightarrow L^{-1}(\frac{1}{\sqrt{s}})=\frac{t^{\frac{-1}{2}}}{\sqrt{\pi}}=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$$

$$L^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{s+\frac{1}{2}}})=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}.e^{\frac{-1}{2}t}$$

$$L^{-1}(\frac{e^{-s\ln 2}}{\sqrt{2}\sqrt{s+\frac{1}{2}}})=\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-\ln 2)}}.e^{\frac{-1}{2}(t-\ln 2)}$$

$$L^{-1}(\frac{e^{-s\ln 2}}{\sqrt{2}\sqrt{s+\frac{1}{2}}})=\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-\ln 2)}}.e^{\frac{-1}{2}t}.e^{\frac{1}{2}\ln 2}$$

$$L^{-1}(\frac{e^{-s\ln 2}}{\sqrt{2}\sqrt{s+\frac{1}{2}}})=\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-\ln 2)}}.e^{\frac{-1}{2}t}.\sqrt{2}$$

$$L^{-1}\left(\frac{e^{-s\ln 2}}{\sqrt{2}\sqrt{s+\frac{1}{2}}}\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi(t-\ln 2)}}.e^{\frac{-1}{2}t}$$

گزینه ۳ جواب صحیح است.

کلید سنجش هم گزینه ۳ را انتخاب کرده است!

سطح سوال متوسط!

حل سوال خیلی کمتر می توانست باشد ولی برای معلوم بودن مراحل طی شده, سعی شد تمامی مراحل نوشته شود.

سوال۵) جوابی از معادله دیفرانسیل $xy'' + y' = 4x\ln x$ **که منحنی آن از نقطه** $(1,1)$ **عبور کرده و در نقطه** $x=0$ **مقدار مشتق تابع محدود است, کدام است؟**

۱) $x^2\ln\frac{x}{e}+2$

۲) $\frac{1}{2}x^2\ln x+1$

۳) $x^2\ln x+1$

۴) $\frac{1}{2}x^2\ln\frac{x}{e}+\frac{3}{2}$

- اگر طرفین معادله داده شده را در X ضرب کنیم, معادله به یک معادله کوشی اویلر تبدیل خواهد شد.

$$x^2y''+xy'=4x^2\ln x$$

- در معدله کوشی اویلر از تغییر متغیر های زیر استفاده می کنیم:

$$\ln x=z, x=e^z$$

$$x^2y''+xy'=4x^2\ln x\rightarrow (D(D-1)+D)y_p=4ze^{2z}$$

$$(D^2-D+D)y_p=4ze^{2z}\rightarrow (D^2)y_p=4ze^{2z}\rightarrow y_p=\frac{4ze^{2z}}{D^2}$$

- عبارت به دست آمده به این معنا است که برای به دست آوردن y_p باید از رابطه $4ze^{2z}$ دو بار انتگرال بگیریم.

- اگر از رابطه مورد نظر انتگرال اول را بگیریم, خواهیم داشت:

$$y_p=\frac{1}{D}\left[2ze^{2z}-e^{2z}\right]$$

- انتگرال دوم ما را به رابطه زیر می رساند:

$$y_p=ze^{2z}-e^{2z}+c$$

- با اعمال $\ln x=z, x=e^z$ داریم:

$$y_p=x^2\ln x-x^2+c$$

- با جایگذاری شرط اولیه داده شده صورت سوال: (**که منحنی آن از نقطه** $(1,1)$ **عبور کرده**)

$$1 = 0 - 1 + c \rightarrow c = 2$$

$$y_p = x^2 \ln x - x^2 + 2$$

- گزینه ۱ را در نظر بگیرید که به صورت زیر داده شده است:

$$x^2 \ln \frac{x}{e} + 2$$

- با ساده سازی گزینه ۱ داریم:

$$x^2 \ln \frac{x}{e} + 2 = x^2 [\ln x - \ln e] + 2 = x^2 [\ln x - 1] + 2$$

$$x^2 \ln \frac{x}{e} + 2 = x^2 \ln x - x^2 + 2$$

- همان عبارتی است که به دست آورده بودیم. پس:

گزینه ۱ جواب صحیح است.

کلید سنجش هم گزینه ۱ را انتخاب کرده است!

سطح سوال متوسط!