۳۱- به‌ازای کدام مقدار مثبت a، شعاع همگرایی پاسخ سری معادلهٔ دیفرانسیل $(x^2+a^2)y''+2xy'+4x^2y=0$ در اطراف نقطه $x=-\frac{3}{2}$ برابر $R=\frac{5}{2}$ خواهد بود؟

۱) ۲   ۲) ۴   ۳) ۱   ۴) ۳

پاسخ :

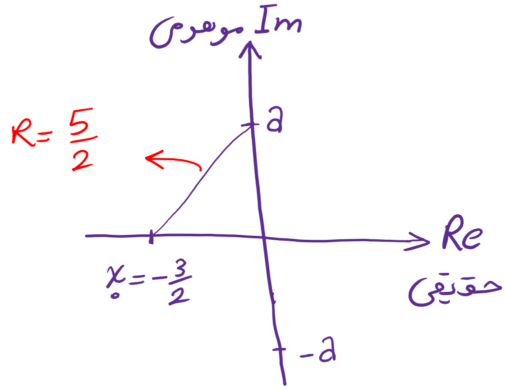
برای پیدا کردن شعاع همگرایی، باید فاصلهٔ نقطهٔ مورد نظر یعنی $x_0=-\frac{3}{2}$ را تا نزدیک ترین نقطهٔ غیرتحلیلی محاسبه کنیم. (طبق صورت سؤال این فاصله برابر با $R=\frac{5}{2}$ می‌باشد)

$$(x^2+a^2)y''+2xy'+4x^2y=0$$

$$\Rightarrow y''+\underbrace{\frac{2x}{x^2+a^2}}_{P(x)}y'+\underbrace{\frac{4x^2}{x^2+a^2}}_{Q(x)}y=0$$

نزدیک ترین نقطهٔ غیرتحلیلی را با صفر قرارداد مخرج های $P(x)$ و $Q(x)$ به دست می‌آوریم:

$$x^2+a^2=0 \Rightarrow x^2=-a^2 \Rightarrow x=\pm ja$$



طبق قضیه فیثاغورس : $(\frac{3}{2})^2+a^2=(\frac{5}{2})^2$

$$\Rightarrow a^2=\frac{25}{4}-\frac{9}{4}=\frac{16}{4}=4$$

$$\Rightarrow \boxed{a=2} \longrightarrow \text{گزینه (1)}$$

سطح سؤال: متوسط

۳۲- جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل $(x-y)^2 y' = 4$ کدام است؟

۱) $y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x-y+2}{x-y-2}\right) + c$

۲) $y = \ln\left(\frac{x-y+2}{x-y-2}\right) + c$

۳) $y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x-y-2}{x-y+2}\right) + c$

۴) $y = \ln\left(\frac{x-y-2}{x-y+2}\right) + c$

با در نظر گرفتن $x-y$ به عنوان یک متغیر خطی داریم:

$$u = x - y$$

$$u' = 1 - y' \Rightarrow y' = 1 - u'$$

معادله اصلی: $(x-y)^2 y' = 4 \xrightarrow[\text{متغیر خطی}]{\text{با جایگذاری}} u^2.(1-u') = 4$

$$\Rightarrow 1 - u' = \frac{4}{u^2} \Rightarrow u' = 1 - \frac{4}{u^2} = \frac{u^2-4}{u^2} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{u^2-4}{u^2}$$

$$\Rightarrow \frac{u^2}{u^2-4}du = dx \Rightarrow \frac{u^2-4+4}{u^2-4}du = dx$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{4}{u^2-4}\right)du = dx \Rightarrow \left(1 + \frac{4}{(u-2)(u+2)}\right)du = dx$$

$$\xrightarrow{\text{تجزیه کسر}} \int\left(1 + \frac{1}{u-2} + \frac{-1}{u+2}\right)du = \int dx \xrightarrow[\text{از طرفین}]{\text{انتگرال گیری}} u + \ln|u-2| - \ln|u+2| = x + C$$

$$\Rightarrow u + \ln\left|\frac{u-2}{u+2}\right| = x + C \xrightarrow[u=x-y]{\text{جایگذاری}} x - y + \ln\left|\frac{x-y-2}{x-y+2}\right| = x + C$$

$$\Rightarrow y = \ln\left|\frac{x-y-2}{x-y+2}\right| + C \longrightarrow$$

گزینه (4)

سطح سؤال: متوسط

۳۳- جواب معادلهٔ انتگرال $y' - 3y - 2\int_0^x y(t)dt = u_2(x)$ با شرط اولیه $y(0) = 0$، کدام است؟ (u تابع پله است.)

۱) $\frac{2\sqrt{17}}{17}u_2(t)e^{\frac{3t}{2}-3}\cosh\left(\frac{\sqrt{17}}{2}(t-2)\right)$

۲) $\frac{2\sqrt{17}}{17}u_2(t)e^{\frac{3t}{2}-3}\sinh\left(\frac{\sqrt{17}}{2}(t-2)\right)$

۳) $\frac{2\sqrt{17}}{17}u_2(t)e^{-\frac{3t}{2}+3}\cosh\left(\frac{\sqrt{17}}{2}(t-2)\right)$

۴) $\frac{2\sqrt{17}}{17}u_2(t)e^{-\frac{3t}{2}+3}\sinh\left(\frac{\sqrt{17}}{2}(t-2)\right)$

معادله انتگرالی ← لاپلاس

تعریف کانولوشن

خواص لاپلاس

لا

نکته : $L\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{F(s)}{s}$

نکته : $u_2(t) = u(t-2)$

$L[y(t)] = Y(s)$

$L[y'(t)] = sY(s) - y(0)$

* از طرفین معادله، لاپلاس می‌گیریم:

$$L[y'] - 3L[y] - 2L\left[\int_0^x y(t)dt\right] = L[u(t-2)]$$

$$sY(s) - \cancel{y(0)} - 3Y(s) - 2\left(\frac{Y(s)}{s}\right) = \frac{e^{-2s}}{s}$$

$$\xRightarrow{\times s} s^2Y(s) - 3sY(s) - 2Y(s) = e^{-2s} \Rightarrow (s^2 - 3s - 2)Y(s) = e^{-2s}$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{e^{-2s}}{s^2 - 3s - 2} = \frac{e^{-2s}}{\left(s - \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2}\right)\left(s - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2}\right)}$$

$$\Delta = 9 - 4(-2) = 17$$

$$s_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{e^{-2\left(S-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\right)}}{\left(S-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{17}}{2}\right)\left(S-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{17}}{2}\right)} = \frac{e^{-3}\cdot e^{-2\left(S-\frac{3}{2}\right)}}{\left(S-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{17}}{2}\right)^2}$$

$$\Rightarrow y(t) = L^{-1}\left[\frac{e^{-3}\cdot e^{-2\left(S-\frac{3}{2}\right)}}{\left(S-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{17}}{2}\right)^2}\right] = e^{-3}\cdot e^{\frac{3}{2}t}\cdot L^{-1}\left[\frac{e^{-2S}}{S^2-\left(\frac{\sqrt{17}}{2}\right)^2}\right]$$

با توجه به ارتکل $L[\sinh at] = \dfrac{a}{S^2-a^2}$ داریم :

شیفت زمانی

$$L^{-1}\left[\frac{e^{-2S}}{S^2-\underbrace{\left(\frac{\sqrt{17}}{2}\right)^2}_{a}}\right] = \underbrace{\frac{2}{\sqrt{17}}}_{1/a}\sinh\left[\frac{\sqrt{17}}{2}(t-2)\right]\cdot u(t-2)$$

$$\Rightarrow y(t) = e^{-3}\cdot e^{\frac{3}{2}t}\cdot\frac{2}{\sqrt{17}}\sinh\left[\frac{\sqrt{17}}{2}(t-2)\right]\cdot u(t-2)$$

$$= \frac{2\sqrt{17}}{17}\cdot u_2(t)\cdot e^{\frac{3}{2}t-3}\cdot\sinh\left[\frac{\sqrt{17}}{2}(t-2)\right] \rightarrow \text{(2) گزینه}$$

سطح سوال : دشوار

۳۴- لاپلاس وارون تابع $F(s)=\frac{1}{2^s\sqrt{2s+1}}$ برای $t>\ln 2$ کدام گزینه است؟

(راهنمایی: $\Gamma(x)$ تابع گاما است و $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$)

۱) $\frac{e^{-\frac{1}{2}(t-\ln 2)}}{\sqrt{2\pi t}}$

۲) $\frac{e^{-\frac{1}{2}(t-\ln 2)}}{\sqrt{2(t-\ln 2)}}$

۳) $\frac{e^{-\frac{t}{2}}}{\sqrt{\pi(t-\ln 2)}}$

۴) $\frac{e^{-\frac{t}{2}}}{\sqrt{2\pi(t-\ln 2)}}$

یادآوری:

$$t^a \xrightarrow{\text{لاپلاس}} \frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left[\frac{1}{s^{a+1}}\right]=\frac{t^a}{\Gamma(a+1)}$$

$$F(s)=\frac{1}{2^s\sqrt{2s+1}}=\frac{1}{2^s\sqrt{2(s+\frac{1}{2})}}=\frac{1}{2^s.\sqrt{2}.\sqrt{s+\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{1}{2^{s+\frac{1}{2}}.(s+\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}} \qquad 2=e^{\ln 2}\Rightarrow 2^{s+\frac{1}{2}}=e^{(\ln 2)(s+\frac{1}{2})}$$

$$=\frac{1}{e^{(\ln 2)(s+\frac{1}{2})}.(s+\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}}=\frac{e^{(-\ln 2)(s+\frac{1}{2})}}{(s+\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}} \rightarrow e^{-\frac{t}{2}}$$

در حوزه زمان

$$\Rightarrow f(t)=e^{-\frac{t}{2}}.L^{-1}\left[\frac{e^{(-\ln 2)s}}{s^{\frac{1}{2}}}\right] \rightarrow (t-\ln 2)$$

شیفت زمانی

$$\Rightarrow f(t)=e^{-\frac{t}{2}}.\left.L^{-1}\left[\frac{1}{s^{\frac{1}{2}}}\right]\right|_{t\to t-\ln 2}=e^{-\frac{t}{2}}.\frac{1}{\sqrt{\pi(t-\ln 2)}}$$

با توجه به یادآوری

گزینه (3)

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s^{\frac{1}{2}}}\right]=\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})}=\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$$

$$a+1=\frac{1}{2}\Rightarrow a=-\frac{1}{2}$$

سطح سوال: متوسط

لینک کانال یوتیوب

حل ویدیویی در کانال یوتیوب

۳۵- جوابی از معادلهٔ دیفرانسیل $xy''+y'=4x\ln x$ که منحنی آن از نقطه (۱,۱) عبور کرده و در نقطه $x=0$ مقدار مشتق تابع محدود است، کدام است؟

۱) $x^2\ln\frac{x}{e}+2$

۲) $\frac{1}{2}x^2\ln x+1$

۳) $x^2\ln x+1$

۴) $\frac{1}{2}x^2\ln\frac{x}{e}+\frac{3}{2}$

* با ضرب معادله در x، یک معادله‌ی کوشی اویلر داریم:

$$x^2y''+xy'=4x^2\ln x$$

تغییر متغیر $\begin{cases} u=\ln x \\ x=e^u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2y''=y''_u-y'_u \\ xy'=y'_u \end{cases}$

جاگذاری در معادله $\Rightarrow y''_u-y'_u+y'_u=4(e^u)^2.u \Rightarrow y''_u=4ue^{2u}$

باید دوبار انتگرال بگیریم تا y_u بدست آید.

$$\Rightarrow y'_u=\int 4ue^{2u}du=4\left[\frac{1}{2}ue^{2u}-\frac{1}{2}\int e^{2u}du\right]=2ue^{2u}-e^{2u}$$

$$\int e^{2u}du=\frac{1}{2}e^{2u}$$

انتگرال جزء به جزء $\begin{cases} \int t\,dv=t.v-\int v\,dt \\ t=u \Rightarrow dt=du \\ dv=e^{2u}du \Rightarrow v=\frac{1}{2}e^{2u} \end{cases}$

$$\boxed{y'_u=(2u-1)e^{2u}}$$

$$\Rightarrow y_u=\int(2u-1)e^{2u}du=\frac{1}{2}(2u-1)e^{2u}-\frac{2}{2}\int e^{2u}.du$$

جزء به جزء $\begin{cases} t=2u-1 \Rightarrow dt=2du \\ dv=e^{2u}du \Rightarrow v=\frac{1}{2}e^{2u} \end{cases}$

$$=(u-\tfrac{1}{2})e^{2u}-\frac{1}{2}e^{2u}=(u-1)e^{2u}+C$$

$$\Rightarrow y_u=(u-1)e^{2u}+C$$

$$y_u = (u-1)e^{2u} + C \xrightarrow[x=e^u]{u=\ln x \text{ جایگذاری}} y = x^2(\ln x - 1) + C$$

مقدار اولیه: $y(1)=1 \Rightarrow 1 = 1(0-1)+C \Rightarrow 1=-1+C \Rightarrow \boxed{C=2}$

$$\Rightarrow y = x^2(\ln x - 1) + 2$$

می دانیم: $\ln e = 1 \Rightarrow y = x^2(\ln x - \ln e) + 2$

$$\Rightarrow \boxed{y = x^2 \ln\left(\frac{x}{e}\right) + 2} \longrightarrow \text{گزینه (1)}$$

سطح سوال: دشوار