به نام خدا

حل سوالات الکترومغناطیس ارشد برق ۱۴۰۱

فرهاد عباس نژاد (مدرس دروس الکترومغناطیس، آمار و احتمال و معادلات دیفرانسیل)

آیدی تلگرام: **@frhda**

آیدی کانال: **@pouranem**

ایمیل: farhad.abbasnezhad@gmail.com

سطح سوالات آسان می باشد.

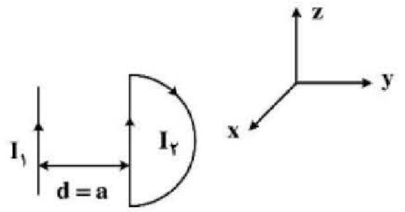
اکثر سوالات تکراری و چند مورد عینا در کتاب تالیفی بنده (پوران پژوهش) و دوره آموزشی حل شده است.

* سه تا از سوال ها را می توان با روش تستی و بدون محاسبات اضافی حل کرد.
* تست 11 و 6 عیناً در کتاب تالیفی بنده (سال 96 - انتشارات پوران پژوهش) و دوره فیلم آموزشی موجود می باشد (بدون تغییر پارامترها)
* دو الی سه مورد دیگر از تست ها نیز مشابهت بالایی با تست های تالیفی کتاب و فیلم آموزشی دارند که در حل سوال ها اشاره شده است.
* در مقایسه با دروس دیگر مثل همیشه سوالات الکترومغناطیس سطح آسانی دارند و به راحتی می توان درصد بالای 70٪ کسب کرد.

این سوال را به جای حل انتگرالی از حل به روش تقریب با اشکال ساده‌تر حل می‌کنیم.

۱۱۵- در شکل زیر نیروی وارد بر نیم‌حلقه به شعاع a کدام است؟

آسان



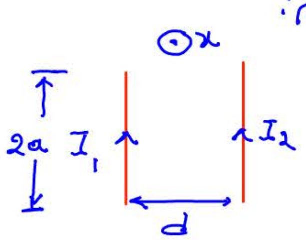
۱) $\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\left(2-\frac{\pi}{2}\right)\hat{a}_y$

۲) $\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\left(-2+\frac{\pi}{2}\right)\hat{a}_y$

۳) $\frac{\mu_0 I_1 I_2}{\pi}\left(2-\frac{\pi}{2}\right)\hat{a}_y$

۴) $\frac{\mu_0 I_1 I_2}{\pi}\left(-2+\frac{\pi}{2}\right)\hat{a}_y$

برای حل این سوال ابتدا نیروی بین دو سیم موازی را به صورت کلی محاسبه می‌کنیم:



$$\vec{F}_{21} = I_2 \vec{L} \times \vec{B}_1 \quad , \quad \vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}(-\hat{x})$$

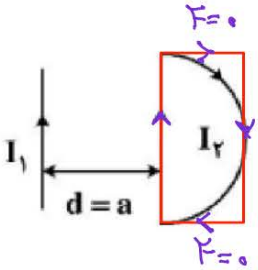
$$\vec{F}_{21} = 2a\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}\hat{z} \times (-\hat{x}) = -\frac{a\mu_0 I_1 I_2}{\pi d}\hat{y}$$

* بیشترین نیروی وارد بر حلقه را در حل خط مستقیم آن می‌باشد (به I_1 نزدیک‌تر است) لذا جهت نیروی کل در راستای این نیرو خواهد بود: $-\hat{y} \longrightarrow$ ۱ و ۳ حذف $\quad 2-\frac{\pi}{2}>1$

* به جای حل نیرو در بخش کمان روش تقریبی زیر را پیشنهاد می‌کنم:

سیستم ۱:

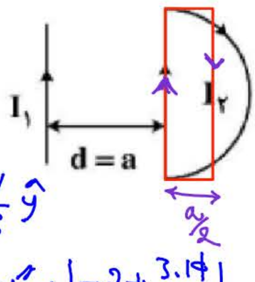
نیروی وارده از سیم I_1 بر حلقه مستطیلی در سیستم ۱ بزرگتر از سیستم سوال می‌باشد (چون مساحت حلقه مستطیلی بزرگتر از دایره است و میدان بیشتری از سمت I_1 در این حلقه در بر می‌گیرد است)



$$\vec{F}_{12} = \frac{a\mu_0 I_1 I_2}{\pi}\left(-\frac{1}{a}+\frac{1}{2a}\right)\hat{y} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{\pi}\,\frac{1}{2}\hat{y}$$

سیستم ۲:

نیروی وارده از سیم I_1 بر حلقه مستطیلی در سیستم ۲ کوچکتر از سیستم سوال می‌باشد (چون مساحت حلقه مستطیلی رسم شده با ابعاد $\frac{a}{2}$ و $2a$ کوچکتر از نیم دایره است)



$$\vec{F}'_{12} = \frac{a\mu_0 I_1 I_2}{\pi}\left(-\frac{1}{a}+\frac{1}{3a/2}\right)\hat{y} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{\pi}\,\frac{-1}{3}\hat{y}$$

$$|\vec{F}'_{12}|<|\vec{F}|<|\vec{F}_{12}| \longrightarrow \underset{0.33}{\frac{1}{3}} < \frac{|\vec{F}|}{\frac{\mu_0 I_1 I_2}{\pi}} < \underset{0.5}{\frac{1}{2}}$$

گزینه ۲: $\frac{\left|-2+\frac{3.14}{2}\right|}{2} = \frac{0.43}{2} \simeq 0.2$ ✗

گزینه ۴: $\left|-2+\frac{3.14}{2}\right| = 0.43$ ✓

۱۱۶- یک کره به شعاع a دارای بارحجمی غیریکنواخت به چگالی $\rho_V = \frac{\rho_0 r}{\sin\theta}$ است، که r فاصله تا مرکز کره است. این کره با سرعت n دوربرثانیه حول محور z می‌چرخد. شدت میدان مغناطیسی (H) در مرکز کره چقدر است؟

آسان

۱) $\frac{\pi^2 n\rho_0 a^3}{6}\hat{a}_z$

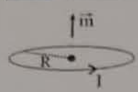
۲) $\frac{\pi^2 n\rho_0 a^3}{2}\hat{a}_z$

۳) $\frac{\pi^2 n\rho_0 a^3}{8}\hat{a}_z$

۴) $\frac{\pi^2 n\rho_0 a^3}{3}\hat{a}_z$

این سوال عیناً سوال تالیفی (تست ۱۴) در صفحه 517 کتاب تالیفی بنده (انتشارات پوران پژوهش) و دوره آموزشی است. حتی بدون تغییر ρ_v و تغییر پارامترها:

۵۱۷ فصل ۷. میدان مغناطیسی و ساکن در خلأ و پتانسیل‌های مغناطیسی



$\vec{m} = ($جریان $\times$ مساحت حلقه$)\,\hat{a}_n$

از آنجائیکه m یک حلقه جریان به شعاع R که جریان I از عبور می‌کند برابر $\pi R^2 I$ است.
پس:

$$dm = \pi R^2 dI \ , \ dI = (J_s\hat{a}_\varphi.\hat{a}_\varphi)a d\theta = \rho_s a^2\omega\sin\theta d\theta \ , \ R = a\sin\theta$$

$$dm = \pi\rho_s a^2\omega(a\sin\theta)^2\sin\theta d\theta = \pi\rho_s\omega a^4\sin^3\theta d\theta$$

$$m = \int_0^\pi dm = \pi\rho_s\omega a^4\int_0^\pi \sin^3\theta d\theta = \rho_s\omega\frac{4}{3}\pi a^4$$

گزینه‌ی ۴ صحیح است.

$$\begin{cases}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta d\theta = \frac{2}{3}, \ \int_0^\pi \sin^3\theta d\theta = \frac{4}{3} \ , \ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta d\theta = 0 \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta d\theta = \frac{2}{3} \ , \ \int_0^\pi \cos^3\theta d\theta = 0 \ , \ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta d\theta = \frac{4}{3}\end{cases}$$

تست ۱۴: یک کره به شعاع a دارای بار حجمی غیریکنواخت به چگالی $\rho_v = \frac{\rho_0 r}{\sin\theta}$ می‌باشد. این کره با سرعت n دور در ثانیه حول یکی از قطرهایش می‌چرخد. میدان مغناطیسی در مرکز کره چقدر است؟

۱) $\frac{\rho_0 a^4\omega}{3}\hat{z}$

۲) $\frac{\rho_0\pi a^3\omega}{12}\hat{z}$

۳) $\frac{\rho_0 a^3\omega}{6}\hat{z}$

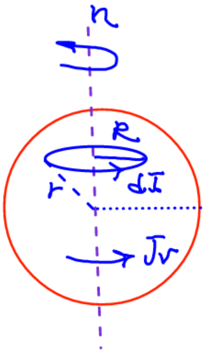
۴) $\frac{\rho_0\pi a^3\omega}{5}\hat{z}$

پاسخ:

$$\vec{J} = \rho\vec{V} = \frac{\rho_0 r}{\sin\theta}R\omega\hat{a}_\varphi \ , \ \omega = 2\pi n\frac{rad}{s} \ , \ R = r\sin\theta$$

$$\vec{J} = \rho_0(2\pi n)r^2\hat{a}_\varphi\ \frac{A}{m^2}$$

برای حل این تست، مناسب‌ترین رابطه، رابطه‌ی سینوسی استخراج شده برای میدان در روی محور حلقه‌ی شامل جریان ثابت dI می‌باشد.



سرعت زاویه‌ای : $\omega = 2\pi n$

در اثر چرخش کره ی باردار جریانی به صورت $\vec{J} = \rho_v \vec{V}$ در کره ایجاد می‌شود.

$$\vec{V} = R\omega\,\hat{\varphi} = 2\pi n r \sin\theta\,\hat{\varphi}$$

$$\vec{J} = \frac{\rho_0 r}{\sin\theta}\, 2\pi n r \sin\theta\,\hat{\varphi} = \rho_0 (2\pi n) r^2\,\hat{\varphi} \quad (A/m^2)$$

مناسب‌ترین فرم H حلقه برای حل این سوال فرم سینوسی آن است :

$$\vec{dH} = \frac{dI}{2R}\sin^3\theta\,\hat{z} \quad , \quad dI = \vec{J}\cdot\vec{ds} = \rho_0 (2\pi n) r^2\, r\,dr\,d\theta$$

$$= \frac{2\pi n \rho_0 r^3}{2 r \sin\theta}\sin^3\theta\,dr\,d\theta\,\hat{z}$$

$$\vec{H} = \pi n \rho_0 \int_0^{\pi}\int_0^{a} r^2 \sin^2\theta\,dr\,d\theta\,\hat{z}$$

$$= \frac{\rho_0 (2\pi n)\pi a^3}{12}\hat{z} = \frac{\pi^2 n \rho_0 a^3}{6}\hat{z}$$

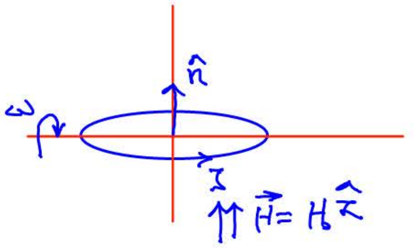
گزینه ۱

۱۱۷- یک حلقه دایروی به شعاع a در صفحه $z = 0$ به مرکز مبدأ مختصات قرار دارد. میدان مغناطیسی ثابت $H = H_0 \hat{a}_z$ در فضا وجود دارد. مقاومت حلقه برابر ۲ اهم است. توان مکانیکی متوسط لازم جهت چرخاندن این حلقه حول محور y با سرعت زاویه‌ای ω رادیان‌برثانیه چقدر است؟ آسان

۱) $\frac{1}{3}\pi^2\mu_0^2\omega^2a^4H_0^2$ ۲) $\frac{1}{6}\pi^2\mu_0^2\omega^2a^4H_0^2$

۳) $\frac{1}{2}\pi^2\mu_0^2\omega^2a^4H_0^2$ ۴) $\frac{1}{4}\pi^2\mu_0^2\omega^2a^4H_0^2$

این تست مرحله به تست تألیفی 48 در کتاب الکترومغناطیس تألیف بنده در ص 725 دوره آموزشی است.



$$\vec{F} = I\vec{L}\times\vec{B} = I\vec{L}\times\mu_0 H_0\hat{z}$$

$$\psi = \vec{B}\cdot\vec{S} = \mu_0 H_0 S\cos\alpha$$

$\vec{B}$, α, $\hat{n}$: وضعیت حلقه در لحظه t

$$\alpha = \omega t$$

$$\psi = \mu_0 H_0 \pi a^2 \cos\omega t$$

$$V_{emf} = -\frac{d\psi}{dt} = -\mu_0 H_0 \pi a^2 \omega \sin\omega t$$

$$P = \frac{V^2}{R} = \frac{\mu_0 H_0^2 \pi^2 a^4 \omega^2}{2}\sin^2\omega t,\quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$P_{ave} = P_0\frac{1}{T}\int_0^T \sin^2\frac{2\pi}{T}t\,dt = \frac{P_0}{2}$$

$$P_{ave} = \frac{\mu_0^2 H_0^2 \pi^2 a^4 \omega^2}{4}$$ گزینه 4

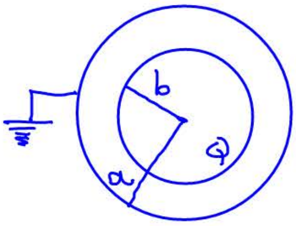
۱۱۸- یک خازن کروی از دو کره هادی هم مرکز به شعاع‌های a و b (a > b) تشکیل شده است. کره بیرونی زمین و بار Q روی کره داخلی قرار گرفته است. حال هادی خارجی را طوری کوچک می‌کنیم که از شعاع a به a' برسد. مقدار کار انجام شده توسط میدان کدام است؟ آسان

۱) $\frac{Q^2}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{a'}-\frac{1}{a}\right)$

۲) $\frac{Q^2}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a'}\right)$

۳) $\frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{a'}-\frac{1}{a}\right)$

۴) $\frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a'}\right)$



$$C_1 = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}} \quad , \quad W_1 = \frac{Q^2}{2C_1}$$

$$C_2 = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a'}} \quad , \quad W_2 = \frac{Q^2}{2C_2}$$

$$\Delta W = |W_1 - W_2| = \frac{Q^2}{2}\left(\frac{1}{C_1}-\frac{1}{C_2}\right)$$

$$= \frac{Q^2}{2}\,\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{a'}\right)$$

$$= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a'}-\frac{1}{a}\right)$$

گزینه 3

۱۱۹- هادی کروی با هدایت یکنواخت $\sigma\ \frac{\mho}{m}$ دارای چگالی بار حجمی ρ_v است. به علت تقارن کروی هادی، لازم است که $\bar{E} = E_r\bar{a}_r$ باشد. $\bar{E}$ درون هادی به‌صورت تابعی از r و t کدام است؟ (فرض کنید ضریب دی‌الکتریکی هادی کروی ϵ_0 باشد و $\rho_v(t)\big|_{t=0} = \rho_0$)

خیلی آسان

۱) $\frac{\rho_0\bar{a}_r}{3\epsilon_0} r e^{\frac{-2\sigma}{\epsilon_0}t}$

۲) $\frac{\rho_0\bar{a}_r}{3\epsilon_0} r e^{\frac{-\sigma}{\epsilon_0}t}$

۳) $\frac{\rho_0\bar{a}_r}{6\epsilon_0} r e^{\frac{-\sigma}{\epsilon_0}t}$

۴) $\frac{\rho_0\bar{a}_r}{6\epsilon_0} r e^{\frac{-2\sigma}{\epsilon_0}t}$

فرم میدان E داخلی نسبت به زمان را می‌خواد. می‌دانیم که اگر درون کره‌ی هادی باری تزریق شود (در $t=0$) این بارها با گذشت زمان بر روی سطح کره جمع می‌شوند. فرم این میدان که در $t \to \infty$ در داخل کره به صفر میل می‌کند برابر است با:

$$\vec{E}(t) = \frac{Q(t)}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{a}_r \ ,\ Q = \rho_v V = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_v = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0 e^{-\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}t}$$

$$\vec{E}(t) = \frac{\rho_0 \hat{a}_r}{3\varepsilon_0} r e^{-\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}t}$$

گزینه 2

۱۲۰- چهار هادی فیلامانی در $z=0$ و در $x=-a-b$، $x=-a$، $x=a$ و $x=a+b$ قرارگرفته‌اند. آن‌ها جریان‌های $\bar{a}_y$ را به‌ترتیب برابر با I_1، $-I_1$، I_2، $-I_2$ از خود عبور می‌دهند. القاء متقابل بر واحد طول L_{12} در این مجموعه کدام است؟

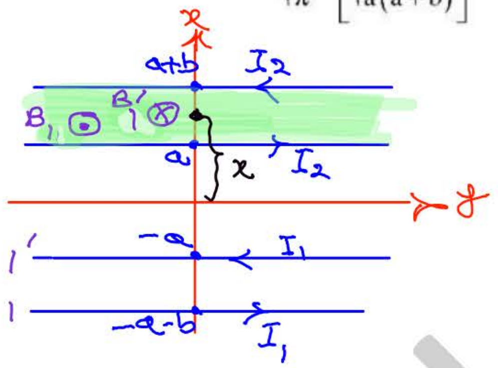
۱) $\frac{\mu_0}{4\pi}\ln\left[\frac{(2a+b)^2}{2a(a+b)}\right]$

۲) $\frac{\mu_0}{2\pi}\ln\left[\frac{(2a+b)^2}{4a(a+b)}\right]$

۳) $\frac{\mu_0}{4\pi}\ln\left[\frac{(2a+b)^2}{4a(a+b)}\right]$

۴) $\frac{\mu_0}{2\pi}\ln\left[\frac{(2a+b)^2}{2a(a+b)}\right]$

تکراری ارشد 93



توجه: اگر $b=0$ باشد مجموع جریان در بالا و پایین محور x ها صفر خواهد بود پس هیچ اندوکتانس متقابلی ایجاد نخواهد شد $\leftarrow L_{12}=0 \leftarrow$ ۱ و ۴ حذف

$$L_{12}=\frac{\varphi}{I_1}\ ,\ \varphi=\int \vec{B}_t\cdot d\vec{s}_2\ ,\ \vec{B}_t=\vec{B}_1+\vec{B}_1'$$

$$\vec{B}_1=\frac{\mu_0 I_1}{2\pi(a+b+x)}(-\hat{z})$$ ناشی از جریان واقع در $x=-a-b$

$$\vec{B}_1'=\frac{\mu_0 I_1}{2\pi(a+x)}\hat{z}$$ $x=-a$ در " " "

$$\vec{B}_t=\frac{\mu_0 I_1}{2\pi}\left(\frac{1}{a+x}-\frac{1}{a+b+x}\right)\hat{z}$$

$$\varphi=\frac{\mu_0 I_1}{2\pi}\int_a^{a+b}\int_0^1\left(\frac{1}{a+x}-\frac{1}{a+b+x}\right)dx$$

$$=\frac{\mu_0 I_1}{2\pi}\ln\frac{a+x}{a+b+x}\Big|_a^{a+b}$$

$$\Rightarrow L_{12}=\frac{\varphi}{I_1}=\frac{\mu_0}{2\pi}\left[\ln\frac{2a+b}{2(a+b)}-\ln\frac{2a}{2a+b}\right]=\frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{(2a+b)^2}{4a(a+b)}$$ گزینه ۲

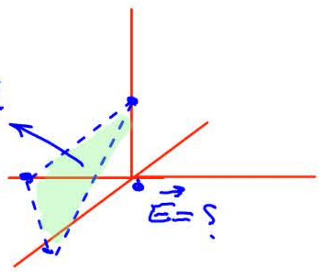
۱۲۱- یک صفحه بی‌نهایت دارای بار صفحه‌ای $\rho_s \left(\frac{C}{m^2}\right)$ است. این صفحه در سطحی با معادله $x - 2y + 3z = 4$ قرار گرفته است. شدت میدان الکتریکی $\overline{E}$ این صفحه در موقعیتی که مبدأ مختصات را شامل گردد، کدام است؟

۱) $\frac{+\rho_s}{\varepsilon_0 \sqrt{14}}\left(\overline{a}_x - 2\overline{a}_y + 3\overline{a}_z\right)$

۲) $\frac{+\rho_s}{\varepsilon_0 2\sqrt{14}}\left(\overline{a}_x - 2\overline{a}_y + 3\overline{a}_z\right)$

۳) $\frac{-\rho_s}{\varepsilon_0 \sqrt{14}}\left(\overline{a}_x - 2\overline{a}_y + 3\overline{a}_z\right)$

۴) $\frac{-\rho_s}{\varepsilon_0 2\sqrt{14}}\left(\overline{a}_x - 2\overline{a}_y + 3\overline{a}_z\right)$



$$\hat{a}_n = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{\hat{x} - 2\hat{y} + 3\hat{z}}{\sqrt{14}}$$

میدان در اطراف یک صفحه بی‌نهایت دارای بار سطحی ρ_s برابر است با:

$$\vec{E} = \frac{\rho_s}{2\varepsilon}(\hat{n})$$

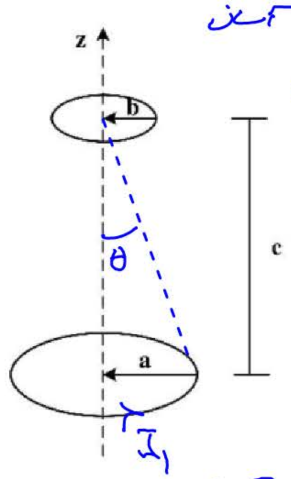
در جهت خواسته شده $\vec{E} = -\frac{\rho_s}{2\varepsilon}\,\frac{\hat{x} - 2\hat{y} + 3\hat{z}}{\sqrt{14}}$ گزینه 4

کلید سنجش گزینه ۳ را زده است که اشتباه است و این سوال قابل اعتراض می‌باشد. ظاهراً طراح سوال در صورت سوال فراموش کرده که صفحه بی‌نهایت را هادی زمین شده اعلام کند.

۱۲۲- دو حلقه مدور مطابق شکل طوری قرار گرفته‌اند که محور آن‌ها در امتداد محور zها بوده و $a >> b$ است. حلقه‌ها موازی یکدیگر هستند. با تقریب‌های لازم و این‌که $c >> a$ است، میزان ضریب القاء متقابل بین دو حلقه کدام است؟

تست

* عیناً تست ۱۴۰۰ ارشد
* نکته: صفحه 689 کتاب تالیفی بنده و دوره فیلم آموزشی.



۱) $\dfrac{\pi\mu_0 a^2 b^2}{2\left(a^2+c^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

۲) $\dfrac{\pi\mu_0 a^2 b^2}{4\left(a^2+c^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

۳) $\dfrac{2\mu_0 a^2 b^2}{\left(a^2+c^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

۴) $\dfrac{4\pi\mu_0 a^2 b^2}{\left(a^2+c^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

در محل حلقه کوچک $\vec{B}_1 = \dfrac{\mu_0 I_1}{2a}\sin^3\theta\,\hat{z}$, $\sin\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+c^2}}$

$= \dfrac{\mu_0 I_1 a^2}{2(a^2+c^2)^{3/2}}$

چون حلقه کوچک است پس می‌توان فرض کرد $\vec{B}_1$ در محل این حلقه مقدار ثابتی دارد:

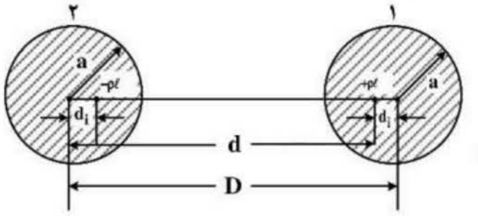
$M = \dfrac{\phi_{12}}{I_1} = \dfrac{\overset{\text{حلقه کوچک}}{B_1}\cdot S_2}{I_1}$

$= \dfrac{\mu_0 a^2 \pi b^2}{2(a^2+c^2)^{3/2}}$

گزینه ۱

۱۲۳- بارخطی با چگالی نامحدود $\rho_L\left(\frac{C}{m}\right)$ به فاصلهٔ d از محور استوانهٔ رسانای نامحدود به شعاع a قرار دارد. $(d > a)$ برای تحلیل مسئله باید تصویر بار در داخل استوانه را به‌صورت $-\rho_L\left(\frac{C}{m}\right)$ و به فاصله $\frac{a^2}{d}$ از محور اصلی استوانه در نظر گرفت. در این حالت پتانسیل استوانه برابر با $\frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{a}{d}$ می‌شود. ظرفیت واحد طول خط ارتباط دو سیمهٔ زیر را برحسب $\left(\frac{F}{m}\right)$ کدام است؟ (ضریب گذردهی مطلق اطراف هادی‌ها ε فرض شده است.)

متوسط



این سوال را با روش مدل و تقریب حل می‌کنیم.

سیستم داده شده را با یک خازن مسطح معادل در صفحه هادی معادل می‌کنیم.

۱) $C = \dfrac{\pi\varepsilon}{\ln\left[\dfrac{D}{2a} + \sqrt{\left(\dfrac{D}{2a}\right)^2 - 1}\right]}$

۲) $C = \dfrac{\pi\varepsilon}{\ln\left[\dfrac{D}{2a} - \sqrt{\left(\dfrac{D}{2a}\right)^2 + 1}\right]}$

۳) $C = \dfrac{\pi\varepsilon}{\ln\left[\dfrac{D}{2a} - \sqrt{\left(\dfrac{D}{2a}\right)^2 - 1}\right]}$

۴) $C = \dfrac{\pi\varepsilon}{\ln\left[\dfrac{D}{2a} + \sqrt{\left(\dfrac{D}{2a}\right)^2 + 1}\right]}$

$C = \varepsilon \dfrac{A}{D_0}$

1) بررسی حالت $D = 2a$:

در این حالت الکترودها که به صورت دایره به قطر $2a$ هستند مماس برهم می‌شوند. از طرفی در خازن مسطح مدل شده مماس شدن الکترودهای خازن به منزلهٔ صفر شدن D_0 می‌باشد و باید $C \to \infty$ میل کند. تنها در گزینهٔ 1 و 3 با $D = 2a$ خازن به بی‌نهایت میل می‌کند.

2) بررسی عبارت آرگومان $\ln$: همانطور که از شکل مشخص است $\left(\frac{D}{2a}\right)_{min} = 1$ می‌باشد:

$0 < \frac{D}{2a} - \sqrt{\left(\frac{D}{2a}\right)^2 - 1} < 1 \rightarrow \ln(\text{عدد بین صفر و یک}) < 0 \rightarrow$ خازن منفی

پس گزینهٔ 3 اشتباه است و گزینهٔ 1 صحیح است.

۱۲۴- کره فلزی به شعاع a را در یک فضای نامتناهی که دارای ضریب دی‌الکتریکی‌نسبی $\pi\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)$ است قرار می‌دهیم. ظرفیت کره چند برابر می‌شود؟ خیلی آسان

۱) ۶ ۲) ۲ ۳) ۱۶ ۴) ۴

تکراری ارشد 87

$$c_1 = 4\pi\varepsilon a$$

$$\frac{1}{C_2} = \int_a^{\infty} \frac{dr}{4\pi\varepsilon r^2 \pi\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)} = \frac{1}{4\pi^2\varepsilon_0}\int_a^{\infty} \frac{dr}{a^2+r^2}$$

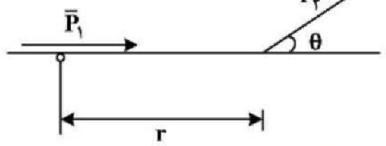
$$= \frac{1}{4\pi^2\varepsilon_0}\,\frac{1}{a}\,tg^{-1}\left(\frac{r}{a}\right)\Big|_a^{\infty} = \frac{1}{4\pi^2\varepsilon_0 a}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{1}{C_2} = \frac{1}{16\pi\varepsilon a} \rightarrow C_2 = 16\pi\varepsilon a$$

$$\rightarrow C_2 = 4C_1$$

۱۲۵- دو دوقطبی با ممان‌های الکتریکی $\overline{P}_1$ و $\overline{P}_2$ به‌صورت زیر دردست است. نیروی وارده بین $\overline{P}_1$ و $\overline{P}_2$ را برحسب زاویه θ و فاصله بین آن دو کدام است؟

متوسط به بالا



۱) $\dfrac{3}{4\pi\epsilon_0 r^4}\left[P_1 r - 3P_1 r\cos\theta\right]\overline{P}_2$

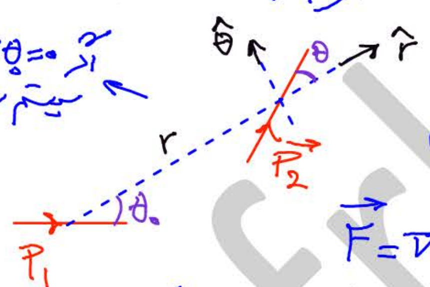
۲) $\dfrac{3}{4\pi\epsilon_0 r^4}\left[P_1 r\,\overline{P}_2 - 3P_1P_2\cos\theta\,\overline{r}\right]$

۳) $\dfrac{3}{4\pi\epsilon_0 r^4}\left[P_1P_2 - 3P_1P_2\cos\theta\right]\overline{r}$

۴) $\dfrac{3}{4\pi\epsilon_0 r^4}\left[P_1P_2\overline{r} - 3P_1 r\cos\theta\,\overline{P}_2\right]$

در مورد اشتباه بودن گزینه‌ها سوال زیاد شده و متاسفانه راه حل‌های ارائه شده که به جواب صحیح نرسیده.
برای حل این سوال ابتدا یک سیستم کلی را بررسی می‌کنیم و سپس با یک حالت خاص به خواسته مسئله می‌رسیم:

حالت کلی‌تر مسئله سیستم زیر می‌باشد.



اگر $\theta_0 = 0$ شود حالت سیستم سوال حاصل می‌شود.

در سیستم متشکل از دو دوقطبی یا یک دوقطبی در معرض میدان خارجی برای محاسبه نیرو داریم:

$$\vec F = \nabla(\vec P_2\cdot\vec E_1)$$

$\vec P_2$ را می‌توان به مولفه‌های نرمال $\hat r$ و $\hat\theta$ تجزیه کرد: $\vec P_2 = P_2\cos\theta\,\hat r + P_2\sin\theta\,\hat\theta$

همچنین میدان $\vec E_1$ مربوط به $\vec P_1$ در فضا برابر است با:

$$\vec E_1 = \frac{P_1}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left[2\cos\theta_0\,\hat r + \sin\theta_0\,\hat\theta\right]$$

$$\vec P_2\cdot\vec E_1 = \frac{P_1P_2}{4\pi\epsilon_0 r^3}\Big[\underbrace{2\cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0}_{I(\theta_0)}\Big]$$

$$\vec F = \frac{P_1P_2}{4\pi\epsilon_0}\left[I(\theta_0)\frac{-3}{r^4}\hat r + \frac{1}{r^4}\frac{\partial}{\partial\theta_0}I(\theta_0)\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta_0}I(\theta_0) = -2\cos\theta\sin\theta_0 - 2\sin\theta\cos\theta_0\frac{d\theta}{d\theta_0} + \sin\theta\cos\theta_0 + \cos\theta\left(\frac{d\theta}{d\theta_0}\right)\sin\theta_0$$

$$\theta + \theta_0 = \text{ثابت} \rightarrow \frac{d\theta}{d\theta_0} = -1$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta_0}I(\theta_0) = -3\cos\theta\sin\theta_0 + 3\sin\theta\cos\theta_0$$

با قرار دادن $\theta_0=0$ جواب بدست آمده جواب سوال خواهد بود.

$$\vec{F}_{\text{شکل}} = \frac{P_1P_2}{4\pi\epsilon_0 r^4}\left[-3\,Z(\theta_0=0)\,\hat{r} + \frac{\partial}{\partial\theta_0}Z(\theta_0)\Big|_{\theta_0=0}\right]$$

$$= \frac{P_1P_2}{4\pi\epsilon_0 r^4}\left[-6\cos\theta\,\hat{r} + 3\sin\theta\,\hat{\theta}\right]$$

$$= \frac{3P_1P_2}{4\pi\epsilon_0 r^4}\left[-2\cos\theta\,\hat{r} + \sin\theta\,\hat{\theta}\right]$$

نیرو هم در جهت $\hat{r}$ و هم در جهت $\hat{\theta}$ حاصل شد

مختلف العلامة

$\underbrace{P_2\cos\theta}_{>0}\hat{r} + \underbrace{P_2\sin\theta}_{>0}\hat{\theta}$

گزینه 3 اشتباه است چون فقط در جهت $\hat{r}$ می‌شود.

" 2 " " چون در جهت $\vec{P_2}$ است که به صورت

اگر گزینه 2 را بسط دهیم خواهیم داشت:

$$\frac{3}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left[P_1 r\,\overline{P}_2 - 3P_1P_2\cos\theta\,\overline{r}\right] = \frac{3}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left[P_1 r\left(P_2\cos\theta\,\hat{r} + P_2\sin\theta\,\hat{\theta}\right) - 3P_1P_2\cos\theta\,\vec{r}\right]$$

$$= \frac{3P_1P_2}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left[r\cos\theta\,\hat{r} + r\sin\theta\,\hat{\theta} - 3\cos\theta\,(r\hat{r})\right]$$

$$= \frac{3P_1P_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}\left[-2\cos\theta\,\hat{r} + \sin\theta\,\hat{\theta}\right] \longrightarrow$$ چون عبارت بدست آمده در بالا است

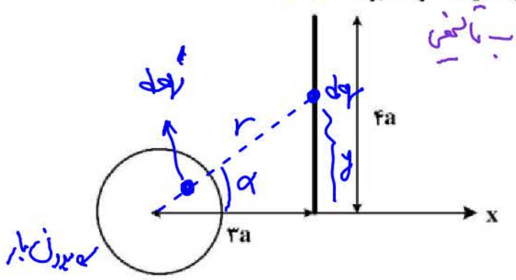
البته ضریب $\frac{1}{r^4}$ باید در گزینه‌ها به جای $\frac{1}{r^3}$ باشد.

۱۲۶– کره رسانای بدون باری به شعاع a که مرکز آن مبدأ مختصات است، مفروض است. یک میله به طول ۴a به موازات محور y مطابق شکل درکنار کره آورده می‌شود، به‌طوری‌که مختصات انتهای آن نقطه (۳a,۰,۰) و دارای چگالی بار طولی غیریکنواخت $\rho_1 = \frac{2\pi\varepsilon_0 y}{a}\left(\frac{C}{m}\right)$ است. پتانسیل کره چند ولت خواهد بود؟

آسان

۱) ۱٫۵
۲) ۲
۳) ۱
۴) ۱٫۸

مشابه تست تالیفی 18 در صفحه 437 کتاب تالیفی
شبیه (انتگرالات پایان‌ترم صحیح)



$$dq = \rho_L\, dy = \frac{2\pi\varepsilon y}{a}\, dy$$

بار تصویر $$dq' = -\frac{a}{r}\, dq = \frac{-a}{\sqrt{y^2+9a^2}} \frac{2\pi\varepsilon y}{a}\, dy$$

$$= -\frac{2\pi\varepsilon y}{\sqrt{y^2+9a^2}}\, dy$$

$$q' = \int_0^{4a} (-2\pi\varepsilon) \frac{y}{\sqrt{y^2+9a^2}}\, dy = -2\pi\varepsilon \sqrt{y^2+9a^2}\,\Big|_0^{4a}$$

$$q' = -4\pi a\varepsilon$$

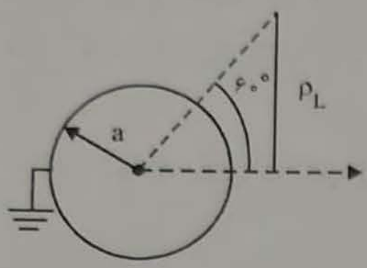
چون کره بدون بار است پس باید بار q'' در مرکز کره داشته باشیم تا $q'+q''=0$ شود لذا

$$q'' = -q' = 4\pi a\varepsilon$$

$$V = \frac{q''}{4\pi a\varepsilon} = 1$$

تست ۱۸: بار خطی به چگالی ρ_L مطابق شکل زیر در مجاورت کره‌ای فلزی زمین شده به شعاع a قرار دارد. تصویر این بار خطی نسبت به کره کدام است؟ (راهنمایی: $\int \frac{du}{\cos u} = \ln \frac{1+\tan\frac{u}{2}}{1-\tan\frac{u}{2}}$)

(تألیفی)

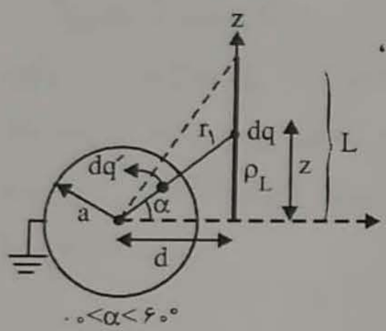


۱) $-a\rho_L \ln\left(\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)$

۲) $-a\rho_L \ln(1-\sqrt{3})$

۳) $\frac{-a\rho_L}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right)$

۴) $-a\rho_L \ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right)$



پاسخ: اگر بار dq را روی محور z در نقطه $(0,z)$ در نظـر بگیـریم، مقدار بار تصویر در داخل کره برابر خواهد بود:

$$dq' = -\frac{a}{r_1}dq = -\frac{q}{\sqrt{d^2+z^2}}dq \ , \ dq = \rho_L dz$$

$$dq' = -\frac{a}{\sqrt{d^2+z^2}}\rho_L dz$$

d فاصله خط بار از مرکز کره فرض شده است. کل بار تصویر در داخل کره عبارت است از:

$$q' = \int_0^L dq' = -\int_0^L \frac{a\rho_L}{\sqrt{d^2+z^2}}dz = -a\rho_L \int_0^L \frac{dz}{\sqrt{d^2+z^2}}$$