

سوال ۱

سیستم زیر، اگر در لحظه $t = 0$ ، طناب از نقطه A پاره شود. سرعت جسم در چه لحظه‌ای برای اولین بار $(t > 0)$ صفر می‌شود؟

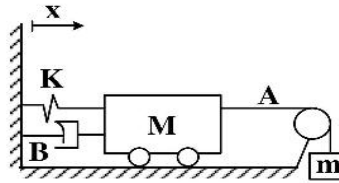
$$M = 2 \text{ kg}$$

$$m = 4 \text{ kg}$$

$$K = 20 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$B = 4 \frac{\text{Ns}}{\text{m}}$$

$$g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

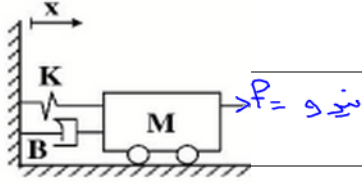


- $\frac{\pi}{2}$
- $\frac{2\pi}{2}$
- $\frac{\pi}{4}$
- $\frac{\pi}{2}$

فصل سوم	مبحث
ساده	سطح سوال
۳۰ ثانیه	زمان تقریبی حل سوال

حل سوال

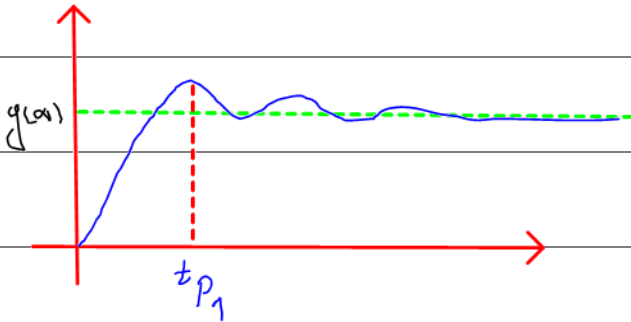
با پارامترهای مشخص شده، در واقع به جرم M یک ضربه وارد می شود (اندازه آن مهم نیست)
حالی مثال این است:



اولین بار که پاسخ ضربه سیستم زیرمغزی شود؟
پاسخ بده این سیستم را بار ماضی بردیم و می دانیم که:

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + Bs + K} = \frac{1}{2s^2 + 4s + 20} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s^2 + 2s + 10} \right)$$

زیرمغزی $\rightarrow \xi < 1 \rightarrow \xi = \frac{1}{\sqrt{10}} \rightarrow 2\xi\omega_n = 2 \rightarrow \omega_n = \sqrt{10}$



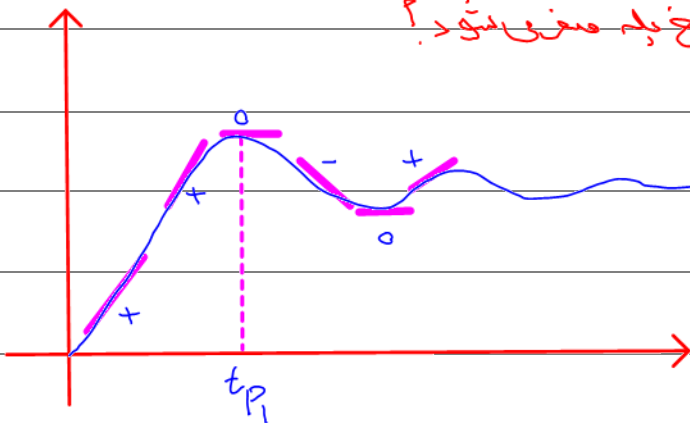
$$t_{p_n} = \frac{n\pi}{\omega_d} \quad t_{p_1} = \frac{\pi}{\omega_d}$$

می دانیم پاسخ ضربه، مشتق پاسخ بده است.

مشتق پاسخ بده یعنی سبب خط مماس بر نمودار پاسخ بده در هر لحظه

پس سوال می شود:

اولین بار که سبب خط مماس بر پاسخ بده مغزی شود؟



از روی شکل مشخص است که در لحظه t_{p_1} سبب خط مماس ممواست.

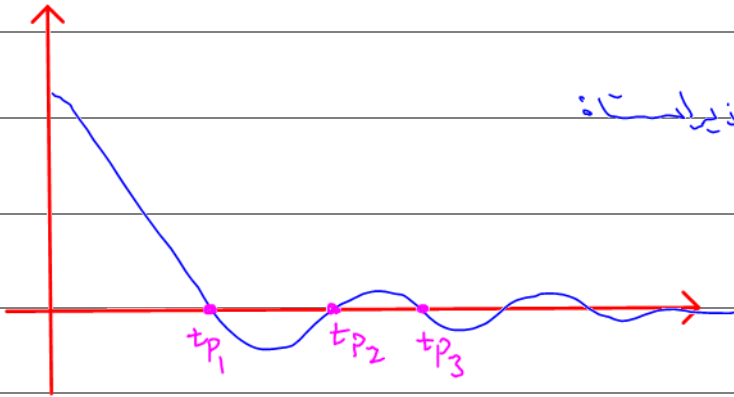
$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} = 3 \rightarrow t_{p_1} = \frac{\pi}{3}$$

گزینه ۱ ✓

حل سوال

حل با انتهای کالی:

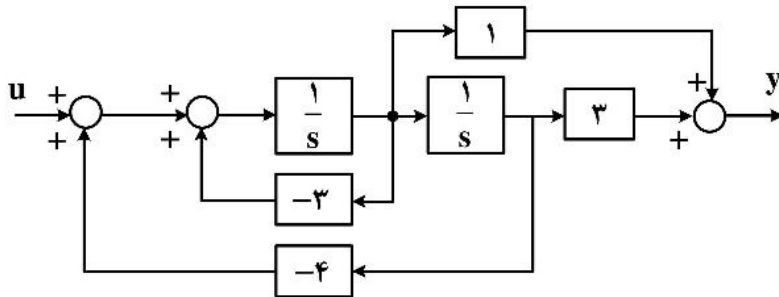
پایه هتوبه سیمت زیر میرا به شکل زیر است:



$$t_{p1} = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{3} \checkmark$$

سوال ۲

بلوک دیاگرام زیر را در نظر بگیرید. اگر $u = -ky$ در نظر گرفته شود، مقدار k برای نوسانی شدن سیستم کدام است؟



- (۱) $-\frac{4}{3}$
- (۲) ۳
- (۳) -۳

(۴) نمی توان مقداری برای k تعیین کرد که سیستم در حالت نوسانی قرار گیرد.

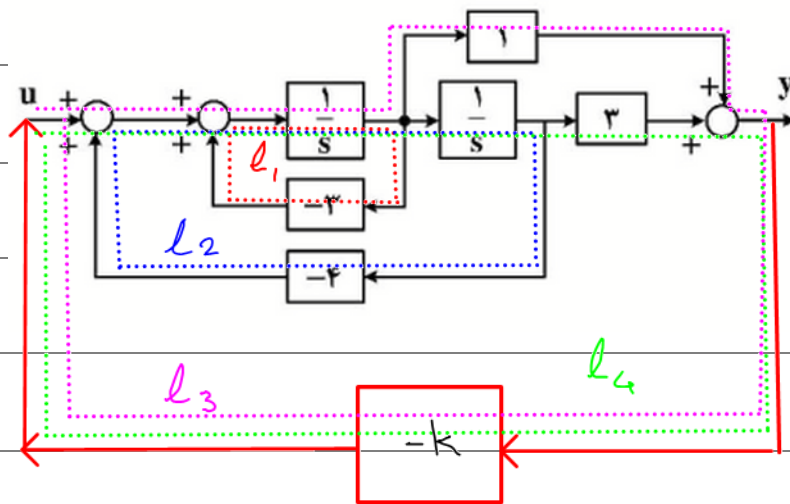
فصل اول-فصل دوم	مبحث
ساده	سطح سوال
۱ دقیقه	زمان تقریبی حل سوال

حل سوال

برای نوشتن شدن، باید قطبهای طبقه‌بندی روی محور دین قرار گیرد.
 قطبهای طبقه‌بندی یعنی ریشه‌های $\Delta(s)$ که در نمودار میوین به شکل زیر حاصل می‌شود:

$$\Delta(s) = 1 - \left(\sum \text{حیله‌ها} \right) + \left(\sum \text{حیله‌ها} \right) + \dots$$

عبارت $u = -ky$ دارای نمودار اعمال و ریس $\Delta(s)$ را بدین‌گونه می‌نویسیم:



ملاحظه می‌شود که طبقه‌بندی $\frac{1}{s}$ مشترک بوده و طبقه مستقل نداریم لذا داریم:

$$\Delta(s) = 1 - (l_1 + l_2 + l_3 + l_4) = 0$$

$$\Delta(s) = 1 - \left(-\frac{3}{s} + \frac{-4}{s^2} + \frac{-3k}{s^2} + -\frac{k}{s} \right) = 0$$

$$\Delta(s) = s^2 + (3+k)s + (4+3k) = 0$$

حل سوال

برای اینکه هر دو قطب روی محور واقع باشند باید ضریب s^0 منفی شود (مثبت نکند) و ضریب s^2 مثبت (هم علامت ضریب s^2) باشد.

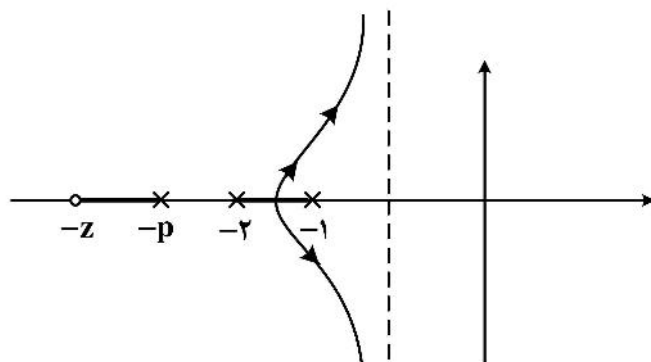
$$\text{تقاطع} \rightarrow 4 + 3k = -5 \Rightarrow \text{ضریب } s^0 \rightarrow k = -3 \rightarrow k + 3 = 0$$

فرا برای هیچ مقدار k ، سیستم نوسانی نیست.

جواب است که در سوال ۱۴۰۰ عبارت نوسانی شدن را مطابق زیر میرا گرفته بودند!!

سوال ۳

مکان هندسی ریشه‌های سیستمی به صورت زیر است. چه رابطه‌ای بین p و z باید باشد تا زمان نشست با معیار ۲ درصد برابر با ۲ ثانیه باشد؟



(۱) $z - p = 1$

(۲) $p - z = 2$

(۳) $p - z = 1$

(۴) $z - p = 2$

فصل سوم-فصل پنجم	مبحث
ساده	سطح سوال
۱ دقیقه	زمان تقریبی حل سوال

حل سوال

$$T_s = \frac{4}{5w_n} \Rightarrow T_s = 2 \Rightarrow 5w_n = 2 \rightarrow$$

یعنی کجایی حقیقی قطبها و مقادیر k برابر $-2 = -5w_n$ می‌شود.

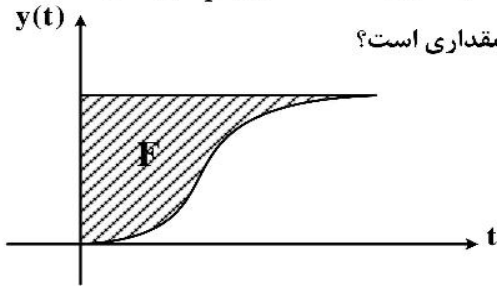
یعنی مکان هندسی از خط $s = -2$ عبور کند یا به عبارتی محل تقاطع جانها یوس -2 باشد (نقطه طلایی)

$$\text{حل تقاطع جانها} = \frac{\sum \text{Re}(P_i) - \sum \text{Re}(z_i)}{n - m}$$

$$\sim \sim \sim = \frac{-2 + -1 + -p - (-2)}{3 - 1} = -2$$

$$z - p = -1 \rightarrow p - z = 1 \quad \checkmark \text{ گزینه ۳}$$

تابع تبدیل حلقه‌باز سیستمی به صورت $\frac{1}{\alpha s + 1}$ است. با استفاده از کنترل‌کننده تناسبی $u = (r - y)k_p$ که r ورودی و y خروجی است پاسخ پله به صورت زیر می‌شود. F چه مقداری است؟



$$F = k_p \quad (1)$$

$$F = \frac{\alpha k_p}{(k_p + 1)^2} \quad (2)$$

$$F = \alpha k_p \quad (3)$$

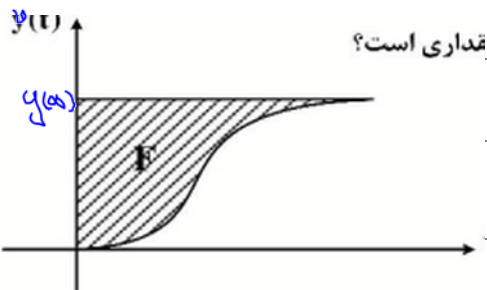
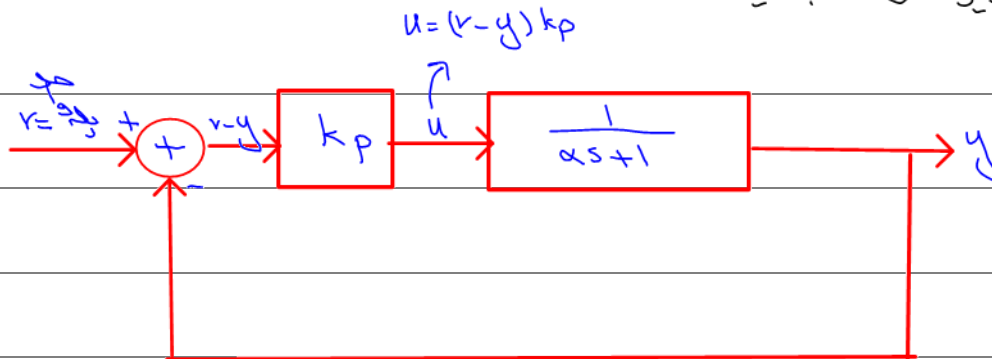
$$F = \frac{(k_p + 1)^2}{\alpha} \quad (4)$$

فصل سوم	مبحث
ساده	سطح سوال
۲ دقیقه	زمان تقریبی حل سوال

حل سوال

توجه مورد نیاز سوال:

در سیستم حلقه بسته زیر F را حساب کنید:



$$F = \int_0^{\infty} (y(\infty) - y(t)) dt$$

$$y(\infty) = \text{dc} \times \text{پهنای باند} = \frac{Y(s)}{R(s)} \Big|_{s=0} \times 1$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{k_p}{\alpha s + 1 + k_p} \rightarrow \text{dc} \times \text{پهنای باند} = \frac{k_p}{1 + k_p}$$

$$y(\infty) = \frac{k_p}{1 + k_p} \quad Y(s) = R(s) \frac{k_p}{\alpha s + 1 + k_p} = \frac{1}{s} \frac{k_p}{\alpha s + 1 + k_p}$$

$$Y(s) = \frac{k_p}{1 + k_p} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1 + k_p}{\alpha}} \right) \rightarrow y(t) = \frac{k_p}{1 + k_p} \left(1 - e^{-\left(\frac{1 + k_p}{\alpha}\right)t} \right)$$

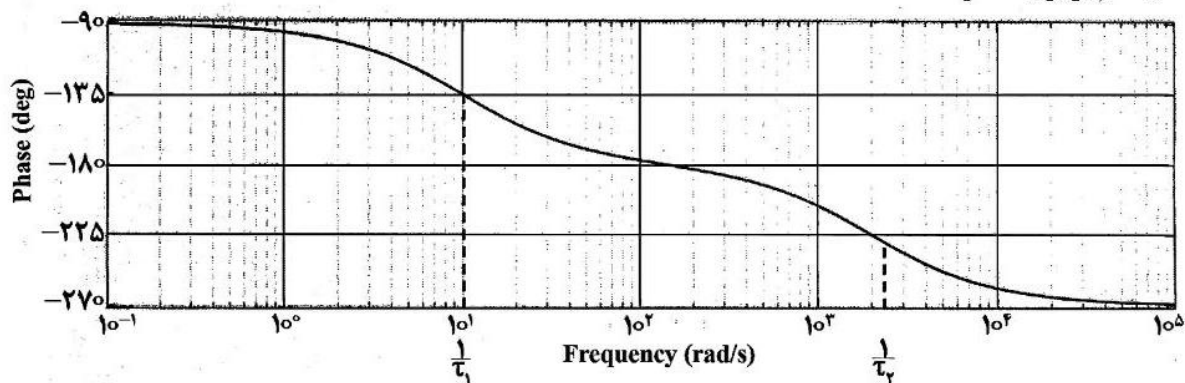
$$F = \int_0^{\infty} \frac{k_p}{1 + k_p} - y(t) dt = \int_0^{\infty} \frac{k_p}{1 + k_p} e^{-\left(\frac{1 + k_p}{\alpha}\right)t} dt$$

حل سوال

$$F = \frac{K_p}{1+K_p} \times \frac{1}{-\frac{(1+K_p)}{\alpha}} e^{-\frac{(1+K_p)}{\alpha}t} \Big|_0^{\infty} = \frac{K_p \alpha}{(1+K_p)^2} \checkmark$$

سوال ۵

نمودار فاز در دیاگرام بودی سیستمی، مطابق شکل زیر است. به ازای کدام مقدار گین DC، حد بهره در این سیستم برابر یک خواهد شد؟



$$k = \frac{2\tau_1\tau_2}{2\tau_1 + \tau_2} \quad (2)$$

$$k = \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1\tau_2} \quad (4)$$

$$k = \frac{\tau_1\tau_2}{\tau_1 + \tau_2} \quad (1)$$

$$k = \frac{2\tau_1 + \tau_2}{2\tau_1\tau_2} \quad (3)$$

نمودار بودی - پایداری نسبی - جدول راوث	مبحث
ساده	سطح سوال
۱ دقیقه	زمان تقریبی حل سوال

حل سوال

از روی نمودار فاز، سیستم حلقه باز را بیستای آوریم:

چون چینی تکلفه فرعی داریم کمینه فاز است:

① یک قطب در مبدأ $\rightarrow -90^\circ =$ فاز اولیه

② یک قطب ساده در $s = \sqrt{10^2 \times 10^0} \rightarrow$ از 10° تا 10^2 کاهش فاز 90° در $\frac{1}{s}$
 \downarrow
 $s = -10 = -\frac{1}{T_1}$

③ قطب ساده در $s = -\frac{1}{T_2}$ از 10^2 تا 10^4 کاهش فاز 90° داریم و در $s = -\frac{1}{T_2}$
 فاز -45° کم شده است

$$G_{OL}(s) = \frac{k}{s(s + \frac{1}{T_1})(s + \frac{1}{T_2})}$$

حد بهره یک = سیستم در فرکانس پهنای

پس باید k ای را بایم در سیستم حلقه بسته با مقیاس واحد منفی، در فرکانس پهنای است.

$$\Delta(s) = 1 + G_{OL}(s) = 0$$

$$\Delta(s) = s^3 + \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} s^2 + \frac{1}{T_1 T_2} s + k = 0$$

میز پایداری معادله درجه 3 ← حاصلضرب فریب $s^3 = 3$ = حاصلضرب فریب s^2 و s^1

$$\frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} \times \frac{1}{T_1 T_2} = k \times 1 \rightarrow k = \frac{T_1 + T_2}{(T_1 T_2)^2}$$

تاریفانه بلخ صحیح در فرکانس های توانی نتوانی کرد.

تابع تبدیل حلقه‌باز سیستم $G_p(s) = \frac{s^2 + 4}{s^2 + 1}$ با فیدبک واحد منفی را در نظر بگیرید. اگر برای این سیستم از

کنترل کننده $G_c(s) = \frac{k(s + 0.01)(s + b)}{s}$ استفاده کنیم، تأثیر این کنترل کننده بر رفتار

سیستم حلقه‌بسته چه خواهد بود؟

(۱) وجود قطب در مبدأ باعث حذف خطای حالت دائم سیستم حلقه‌بسته به ورودی پله می‌شود و با انتخاب مقادیر مناسب برای b و k می‌توانیم قطب‌های مزدوج مختلط سیستم حلقه‌بسته را به سمت چپ محور موهومی حرکت بدهیم.

(۲) مؤلفه PI در کنترل کننده PID باعث پایداری سیستم حلقه‌بسته می‌شود و با صفر در $-b$ سرعت پاسخ‌دهی سیستم تنظیم می‌شود.

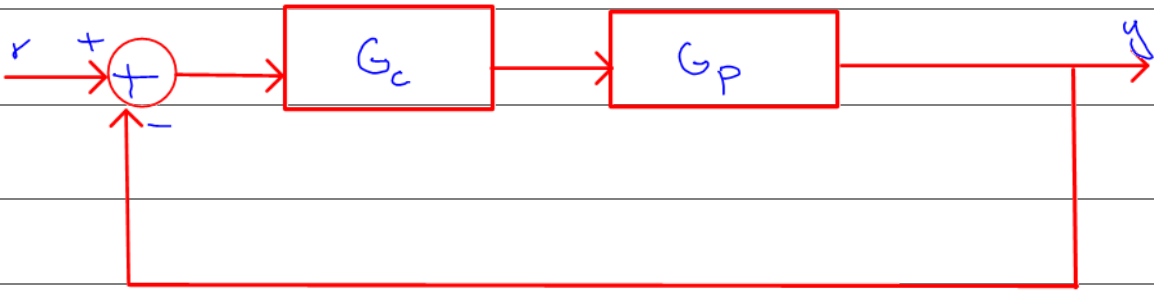
(۳) وجود صفر در -0.01 باعث می‌شود که در سیستم حلقه‌بسته یک قطب غالب نزدیک مبدأ ایجاد گردد و این مسئله باعث کندی سیستم حلقه‌بسته می‌شود. صفر دوم در $-b$ قطب‌های مزدوج مختلط را به سمت چپ کشیده و این مسئله را جبران می‌کند.

(۴) هر سه مورد مذکور صحیح هستند.

کنترل کننده	مبحث
متوسط	سطح سوال
۲ دقیقه	زمان تقریبی حل سوال

حل سوال

سیستم داده شده به شکل زیر است:



حال به بررسی گزینه های بدینم:

گزینه ۲: PI با اضافه کردن فاز منفی، حاشیه فاز و پایداری سیستم را کاهش می دهد

و از طرفی PI نمی تواند موجب افزایش سرعت سیستم شود.

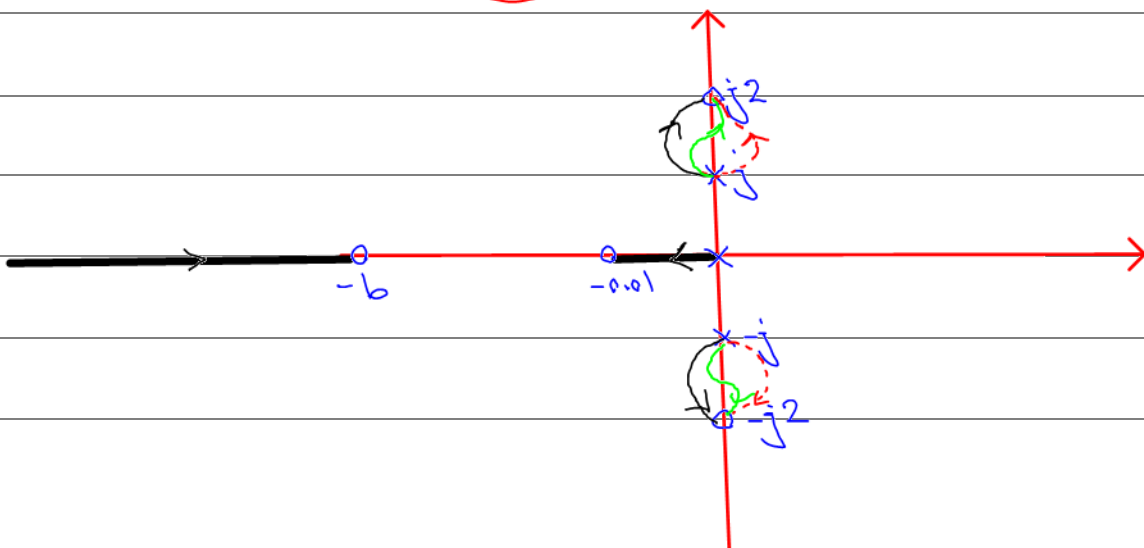
لذا با توجه به موارد بالا بودن گزینه ۲، گزینه ۴ هم رد می شود و بین گزینه ۱ و ۳ باید

بررسی کنیم.

برای بررسی گزینه ۱ و ۳ باید مکان های قطب و صفر را رسم کنیم.

$$\Delta(s) = 1 + G_c(s) G_p(s) = 0$$

$$\Delta(s) = 1 + \frac{k(s+0.01)(s+b)(s^2+4)}{s(s^2+1)} = 0$$

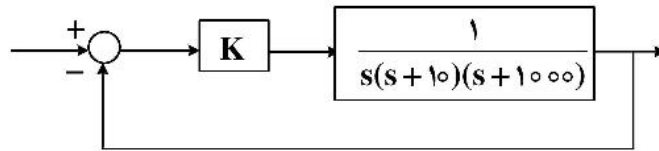


حل سوال

در شکل فوق ملاحظه می شود که برای مقادیر مختلف k و τ معادله سیستم حلقه بسته رسم شده است باید توجه کرد که سیستم نامرئی است و به مقدار اختلاف فاز و قطب حلقه باز (1) قطب با منفر در جیفایت خواهد داشت که 1 قطب در ω دارد.
از طرفی فقط 1 جانب داریم باز اویه 180° و لذا قطب در ω به سمت منفر τ حرکت می کند و لذا منفر τ - قطبهای مختلط را به سمت خود جذب می کند و نیز به ω نادرست است.

در شکل فوق ملاحظه می کنید که سیستم به ازای برخی مقادیر k و τ پایدار می شود و قطبها متلاطم می شود به سمت چپ می آید و شده و لذا با توجه به نوع سیستم، خطای ماندگار می شود پس **توزین 1 صحیح است.**

سیستم کنترل زیر مفروض است. با توجه به مفهوم قطب (یا قطب‌های) مسلط، کدام یک از پاسخ‌های زیر درست است؟



- (۱) از قطب واقع در منهای ۱۰۰۰ نمی‌توان صرف‌نظر کرد.
- (۲) به ازاء مقادیر بزرگ K می‌توان از قطب منهای ۱۰۰۰ صرف‌نظر کرد.
- (۳) از قطب واقع در منهای ۱۰۰۰ می‌توان صرف‌نظر کرد.
- (۴) به ازاء مقادیر کوچک K می‌توان از قطب منهای ۱۰۰۰ صرف‌نظر کرد.

فصل سوم	مبحث
متوسط	سطح سوال
۱ دقیقه	زمان تقریبی حل سوال

حل سوال

مترک خدمت قطب به صورت زیر است:

① بخش حقیقی آن قطب است به قطبهای دیگر (قدر مطلق) بزرگتر باشد.

② مانده آن قطب کوچک باشد.

قطب واقع در منطقی ۱۰۰۰، شرط اول را دارد و مانده (فرضاً در تجزیه بیسرها جزئی)

به صورت زیر است:

$$\lim_{s \rightarrow -1000} \frac{k}{s(s+1000)} = \frac{k}{1000 \times 990}$$

پس برای مقادیر کوچک k ، شرط ② هم برقرار می شود.

پس گزینه ۴ صحیح است.

سوال ۸

کدام گزینه ریشه معادله $\Delta(s) = s^6 + 3s^5 + 2s^4 + 4s^2 + 12s + 8 = 0$ است؟

(۱) $-2 + 2j$

(۲) $-1 + 2j$

(۳) $+1 + j$

(۴) $-2 + j$

پایداری راوٹ	مبحث
ساده	سطح سوال
۳ دقیقه	زمان تقریبی حل سوال

حل سوال

باقی بماند. باید $\Delta(s)$ مثل s^3 نیست لذا حتماً قطب‌های تکراری دارد و در نتیجه اولین
گزینه، گزینه ۳ خواهد بود که باید بررسی شود.

$$\Delta(s) = s^6 + 3s^5 + 2s^4 + 4s^3 + 12s + 8 = 0$$

$$\begin{aligned}\Delta(s) &= s^4(s^2 + 3s + 2) + 4(s^2 + 3s + 2) = 0 \\ &= (s^4 + 4)(s + 1)(s + 2) = 0\end{aligned}$$

$$\Delta(1+j) = ((1+j)^4 + 4)(2+j)(3+j) = 0$$

$$= \cancel{(-4+4)}(2+j)(3+j) = 0 \checkmark$$

پس گزینه ۳ صحیح است.

سوال ۹

سیستم $G(s) = \frac{1}{(s+2)(s+3)}$ و کنترل کننده $k(s) = k_p + \frac{k_I}{s} + k_D s$ را که تحت فیدبک واحد قرار دارند در نظر بگیرید، مقادیر کنترل کننده به گونه‌ای در نظر گرفته شده که سیستم حلقه بسته دارای دو صفر در $z = -3 \pm j$ باشد. کدام عبارت درست است؟

- (۱) افزایش k_D فراجش را افزایش می‌دهد.
 (۲) تغییرات k_D تأثیری در فراجش ندارد.
 (۳) افزایش k_p فراجش را کاهش می‌دهد.
 (۴) افزایش k_I فراجش را افزایش می‌دهد.

کنترل کننده	مبحث
ساده	سطح سوال
۱۰ ثانیه	زمان تقریبی حل سوال

حل سوال

بررسی گزینه ها

(۲) تغییرات k_D تأثیری در فرجهش ندارد.

(۱) افزایش k_D فرجهش را افزایش می دهد.

(۴) افزایش k_I فرجهش را افزایش می دهد.

(۳) افزایش k_P فرجهش را کاهش می دهد.

می دانیم که در کنترلر PID ، داریم:

(I) ترم D یعنی افزایش k_D ، موجب آرام شدن پاسخ و کاهش فرجهش و بهبود زمان نشاء

می شود ← پس گزینه ۲ ردی شود.

(II) ترم P (افزایش k_P) باعث وحشی شدن پاسخ و افزایش فرجهش و کاهش زمان

معود و افزایش زمان نشاء می شود ← گزینه ۳ ردی شود.

(III) ترم I (افزایش k_I) موجب وحشی شدن پاسخ می شود پس فرجهش را زیاد

می کند ← گزینه ۴ درست است.

یک سیستم کنترل با تابع تبدیل حلقه باز $G(s) = \frac{s+z}{(s-z)(s+p)}$, $k, z, p > 0$ و فیدبک واحد منفی مفروض است.

اگر در فرکانس $\sqrt{3}$ ، منحنی نایکوئیست محور حقیقی منفی را در نقطه $(-0.5, 0)$ قطع کند، نسبت $\frac{z}{p}$ چقدر است؟

۳ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

۲ (۴)

$\frac{1}{3}$ (۳)

نمودار نایکوئیست	مبحث
متوسط	سطح سوال
۲ دقیقه	زمان تقریبی حل سوال

حل سوال

$$G(j\sqrt{3}) = -0.5$$

معنای المانعات مسأله این استاده

$$G(j\sqrt{3}) = \frac{j\sqrt{3} + z}{(j\sqrt{3} - z)(j\sqrt{3} + p)} = -0.5$$

چون مفروضه قطب متقابل داریم از افرازه استفاده می کنیم:

$$|G(j\sqrt{3})| = \frac{|j\sqrt{3} + z|}{|j\sqrt{3} - z| |j\sqrt{3} + p|} = 0.5$$

$$\frac{1}{\sqrt{3+p^2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow p^2 = 1 \Rightarrow p = 1$$

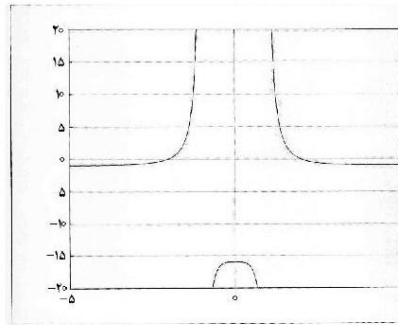
$$G(j\sqrt{3}) = \frac{j\sqrt{3} + z}{(j\sqrt{3} - z)(j\sqrt{3} + 1)} = -\frac{1}{2}$$

$$-j2\sqrt{3} - 2z = -3 - z + j\sqrt{3} - jz\sqrt{3}$$

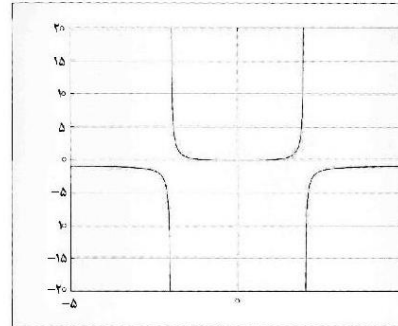
$$\Rightarrow z = 3$$

$$\frac{z}{p} = \frac{3}{1} = 3$$

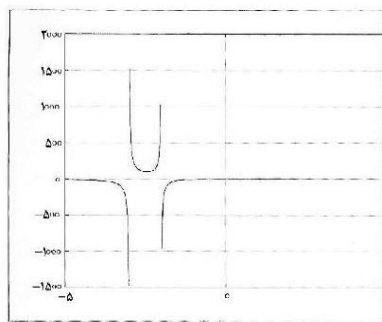
یک سیستم فیدبک منفی واحد با تابع تبدیل حلقه $G(s) = k \frac{(s^2 - 1)(s^2 + 1)}{(s^2 - 4)(s^2 + 4)}$ را در نظر بگیرید. منحنی تغییرات بهره k بر حسب σ (مقدار حقیقی s) کدام گزینه است؟



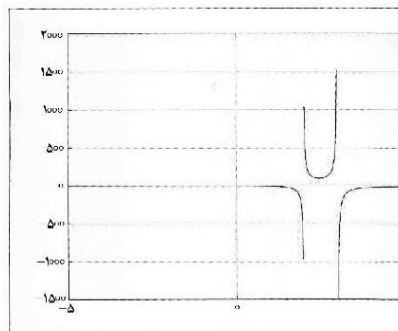
(۲)



(۱)



(۴)



(۳)

ریاضیات دبیرستان	مبحث
ساده	سطح سوال
۲ دقیقه	زمان تقریبی حل سوال

حل سوال

$$\Delta(s) = 1 + k \frac{(s^2-1)(s^2+1)}{(s^2-4)(s^2+4)} = 0$$

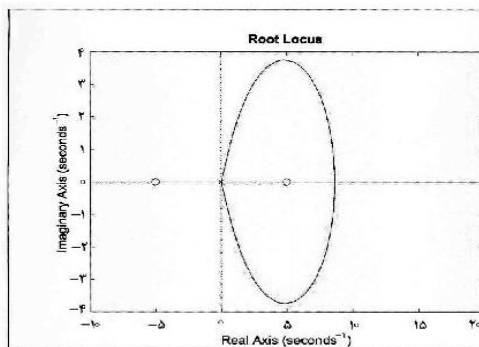
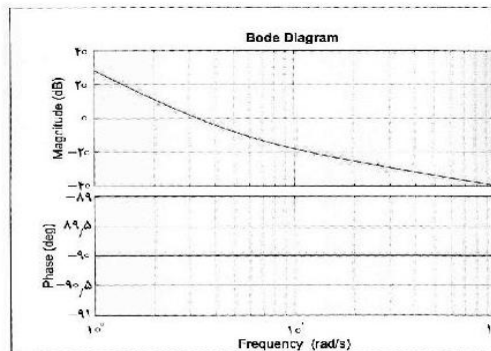
$$k = \frac{(s^2-4)(s^2+4)}{(s^2-1)(s^2+1)} \quad s = \sigma$$

$$k = \frac{(\sigma^2-4)(\sigma^2+4)}{(\sigma^2-1)(\sigma^2+1)}$$

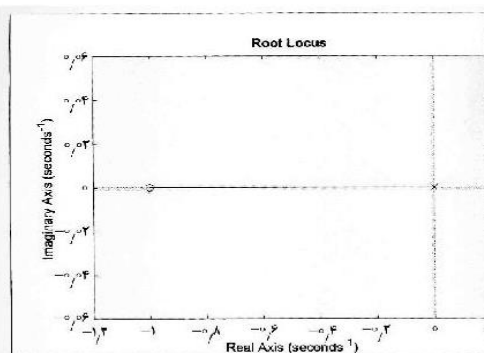
دو جانب در $\sigma = \pm 1$ داریم
پس کزین نوع ردیف شود

بین $1 < k < -1$ ، ک مفروضی شود پس کزین نوع جواب است.

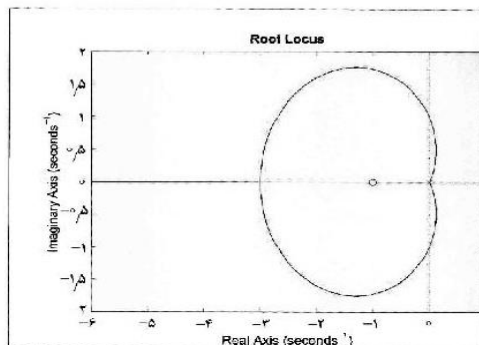
۱۰۲- دیاگرام بودی تابع تبدیل حلقه‌باز یک سیستم حلقه‌بسته با فیدبک منفی داده شده است. کدام گزینه منحنی مکان هندسی ریشه‌های سیستم حلقه‌بسته را نشان می‌دهد؟



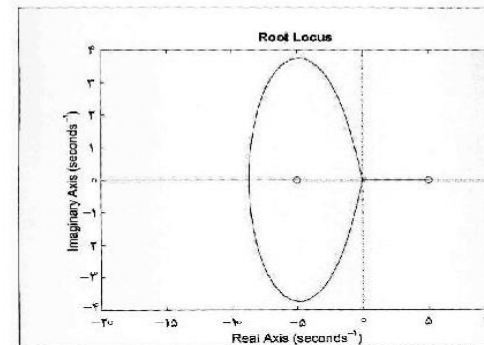
(۲)



(۱)



(۴)



(۳)

بودی-مکان هندسی

متوسط

۳ دقیقه

مبحث

سطح سوال

زمان تقریبی حل سوال

حل سوال

ابتدا باید از روی نمودار پوی تابع خطه بارها جستجو کنیم.

(I) نسبت اولیه نمودار اندازه از $\frac{-20dB}{dec}$ کمتر است (شکل پوی در صقی نیست اولی)

کمتر از $\frac{-20dB}{dec}$ بودن مجوز است

حواص از عددی پوی 20 و 40 در سیاه در 20- رسیده است.

پس نسبت از 1 قطب در ابتدا داریم ← با توجه به تزیین ها مقدار قطب در ابتدا

یا 3 استار مقدار شاضمانی فروبی از ابتدا ← پس 3 قطب در ابتدا داریم

(II) نمودار فاز ثابت بوده و افزایش نسبت نمودار اندازه داریم یعنی عامل $s^2 - a^2$ داریم

$$G(s) = k \frac{s^2 - a^2}{s^3}$$

با توجه به فاز اولیه (-90°) می توان گفت $k > 0$ است:

$$\tilde{G}(s) = k \frac{s^2 - a^2}{s^3}$$

$$\angle \tilde{G}(s) = \angle (s^2 - a^2) + \angle k - 3 \times 90^\circ = \angle (s^2 - a^2) + \angle k - 270^\circ$$

$$\sim \sim = 3 \times -90 + \angle \tilde{G}(s) = -90^\circ$$

$$\angle \tilde{G}(s) = 180^\circ \Rightarrow \langle \tilde{G}(s) \rangle \langle s \Rightarrow k \rangle$$

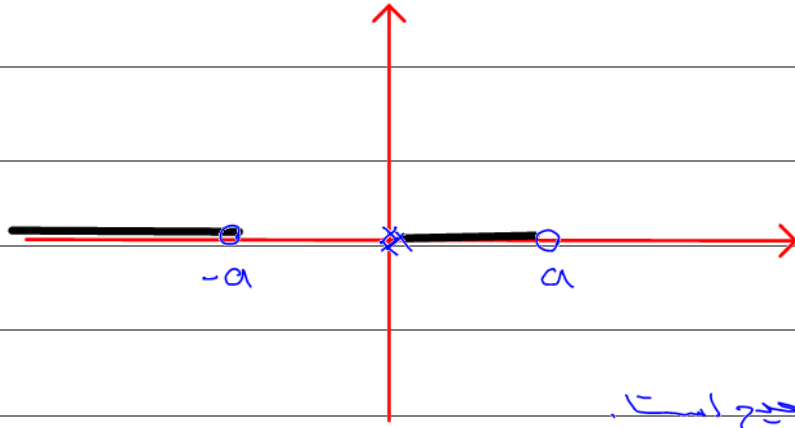
حل باید معادله داریم کنیم:

علامت معادله = علامت ضریب \times علامت k

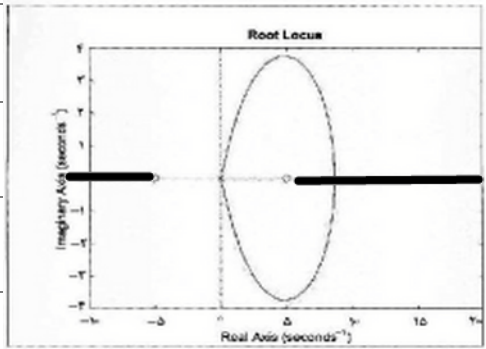
که باید خود معادله داریم کنیم.

حل سوال

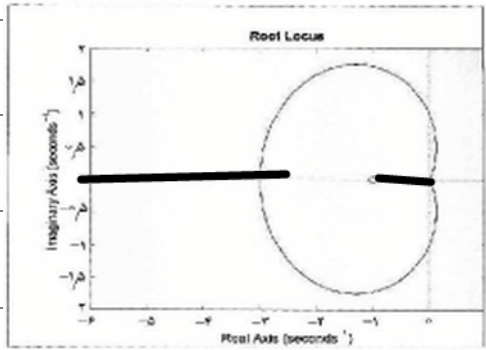
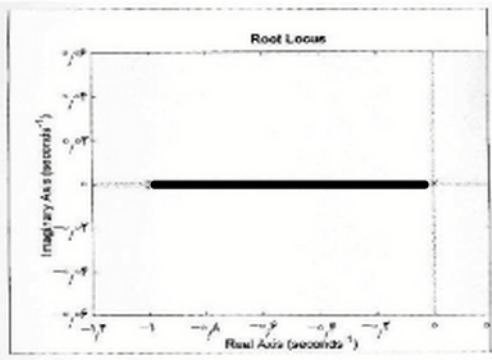
لپس کتی از مور حقیقی جز مکان است که ستاراست آن تعداد خود مفروضه
 قرار گیرد.



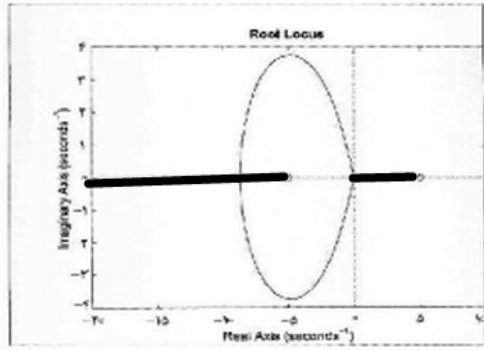
لپس تنها از این 3 صحیح است.



(a)



(c)



✓