به نام خدا

حل سوالات آمار و احتمال ارشد برق ۱۴۰۱

استاد عباس نژاد

آیدی تلگرام: @frhda

ایمیل: farhad.abbasnezhad@gmail.com

سطح سوالات آسان و تکراری می باشد.

همه سوالات در جزوه دوره آمار و احتمال عینا حل شده است.

اگثر دانشجویان دوره اصلی و دوره یک روزه بنده از ۵ سوال حداقل به ۴ سوال پاسخ صحیح دادند.

۴۱- سه توپ مشابه با شماره‌های ۱ و ۲ و ۳ داخل یک جعبه قرار دارند. به‌صورت تصادفی یکی از توپ‌ها را از جعبه خارج و شماره آن را یادداشت کرده و دوباره توپ را به جعبه برمی‌گردانیم. فرایند خارج کردن توپ را تکرار می‌کنیم تا جایی‌که شماره توپی که خارج می‌شود، مشابه شماره‌ای باشد که قبلاً خارج شده است. اگر تعداد دفعاتی که فرایند خارج کردن توپ را انجام داده‌ایم با متغیر تصادفی X نمایش دهیم، میانگین X کدام است؟

۱) $\frac{24}{9}$ ۲) $\frac{31}{9}$ ۳) $\frac{17}{9}$ ۴) $\frac{26}{9}$

کافیست خواسته مسئله را با انتخاب توپ ها پیاده سازی کنیم و از رابطه $E(X)=\sum xP(X=x)$ استفاده کنیم.
برای شروع فرض می کنیم مهره اول عدد یک باشد. البته سه حالت برای شروع خواهیم داشت که می تواند توپ های ۱، ۲ یا ۳ باشد. ولی کافیست یک حالت را بررسی کنیم و در نهایت $E(X)$ بدست آمده را در ۳ ضرب کنیم.
حالت های مختلف را با نمودار درختی شرح می کنیم. توجه داریم که آزمایش ها تا موقعی ادامه می یابد که شماره توپ استخراج شده در انتخاب های قبلی موجود باشد. لذا روند اجرای آزمایش را محدود می کنیم به خواسته مسئله:

(X=x تعداد آزمایش لازم)

$1\ (P=\frac{1}{3}) \rightarrow 1\ (P=\frac{1}{3})$ ✓ $\quad x=2 \rightarrow$ از این حالت اینکه در دو آزمایش اول ۲ عدد یک باشند

$1 \rightarrow 2\ (P=\frac{1}{3}) \rightarrow 1\ (P=\frac{1}{3}) \quad x=3 \rightarrow$ برای این حالت ۳ آزمایش لازم

$1 \rightarrow 2 \rightarrow 2 \quad x=3$

$1 \rightarrow 2\ (\frac{1}{3}) \rightarrow 3\ (\frac{1}{3}) \rightarrow$ ۳ یا ۲ یا ۱ $\ (\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1) \quad x=4$ برای این حالت ۴ آزمایش لازم

$1 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \quad x=3$

$1 \rightarrow 3 \rightarrow 3 \quad x=3$

$1 \rightarrow 3\ (P=\frac{1}{3}) \rightarrow 2\ (P=\frac{1}{3}) \rightarrow$ ۳ یا ۲ یا ۱ $\ (P=1) \quad x=4$

حالات انتخاب عدد توپ اول

$$E(X)=3\left[2\times\frac{1}{9}+3\times\frac{1}{27}+3\times\frac{1}{27}+4\times\frac{1}{27}+3\times\frac{1}{27}+3\times\frac{1}{27}+4\times\frac{1}{27}\right]=3\left[\frac{2}{9}+\frac{20}{27}\right]=3\times\frac{26}{27}=\frac{26}{9}$$

۴۲- تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X به‌صورت زیر است:

$$f_X(x) = Ae^{-x^2+x}$$

که A یک عدد ثابت است. واریانس متغیر تصادفی $Y = 4X+1$ کدام است؟

۱) ۸
۲) ۲
۳) ۱۶
۴) ۴

ما به این سوال را در دوره اصلی و دوره یک روزه حل کردیم.

وجود ترم e^{-x^2} بیانگر توزیع نرمال است.

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

با تناظر یک به یک ترم ها رو مشترک داریم.

بازنویسی تابع داده شده

$$f_X(x) = Ae^{-x^2+x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}}$$

$$= Ae^{-(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}}$$

$$= Ae^{\frac{1}{4}}\, e^{-(x-\frac{1}{2})^2}$$

$$\frac{1}{2\sigma^2} = 1 \rightarrow \sigma^2 = \frac{1}{2}$$

$$Var(4x+1) = 16\,Var(x) = 16\,\sigma_x^2 = 16 \times \frac{1}{2} = 8$$

گزینه ۱

۴۳- متغیرهای تصادفی گسسته X و Y دارای تابع جرم‌های احتمالی $P(X,Y)$ مطابق جدول زیر هستند. مقدار کوواریانس این دو متغیر تصادفی کدام است؟

X \ Y	۰	۱	۲	$f_X(x)$
۰	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{1}{4}$
۱	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$
۲	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	۰	$\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+0=\frac{1}{4}$
$f_Y(y)$	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{16}$	

۱) $-\frac{1}{2}$

۲) $\frac{1}{2}$

۳) $-\frac{1}{8}$

۴) $\frac{1}{8}$

$$E[X]=\sum x f_X(x)=0+\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{4}=1$$
$$E[Y]=\sum y f_Y(y)=0+\frac{1}{2}+2\times\frac{3}{16}=\frac{7}{8}$$

برای یک متغیر تصادفی گسسته با توزیع توأم $f_{X,Y}(x,y)$ و میانگین μ_x و μ_y، کوواریانس را می‌توان از رابطه زیر استفاده کرد:

$$Cov(X,Y)=\sum f_{X,Y}(x,y)(x-\mu_x)(y-\mu_y)$$

$$=\frac{1}{16}(0-1)(0-\frac{7}{8})+\frac{1}{8}(0-1)(1-\frac{7}{8})+\frac{1}{16}(0-1)(2-\frac{7}{8})$$
$$+0+\frac{1}{8}(2-1)(0-\frac{7}{8})+\frac{1}{8}(2-1)(1-\frac{7}{8})$$
$$=\frac{1}{16}\times\frac{7}{8}-\frac{1}{8}\times\frac{1}{8}-\frac{1}{16}\times\frac{9}{8}-\frac{7}{8\times8}+\frac{1}{8}\times\frac{1}{8}$$
$$=\frac{7-9-14}{16\times8}=-\frac{1}{8}$$

گزینه 3

۴۴- تابع چگالی احتمال مشترک دو متغیر تصادفی به‌صورت زیر است:

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases}8xy & 1\geq x\geq y\geq 0\\ 0 & \text{سایر}\end{cases}$$

احتمال $P[Y>X^2]$، کدام است؟

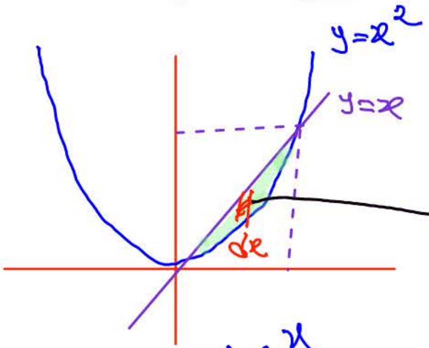
۱) ۰/۲۵

۲) ۰/۴

۳) ۰/۱۶

۴) ۰/۳۳

ناحیه هم‌پوشانی این دو منحنی را باید با هم مشخص کنیم



$x^2<y<x$

$0<x<1$

روش اول:

$$P=\int_0^1\int_{x^2}^{x} 8xy\,dy\,dx=\int_0^1 4xy^2\Big|_{x^2}^{x}dx$$

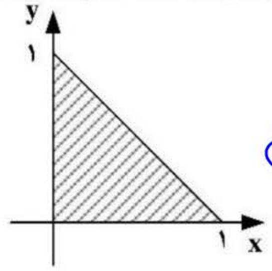
$$=\int_0^1 4x(x^2-x^4)\,dx=\int_0^1 4x^3dx-\int_0^1 4x^5dx=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}=0.33$$

روش دوم:

$$P=\int_0^1\int_y^{\sqrt{y}} 8xy\,dx\,dy=\dots=0.33$$

عین همین سوال به عنوان سوال تالیفی در دوره یکروزه حل شده بود.

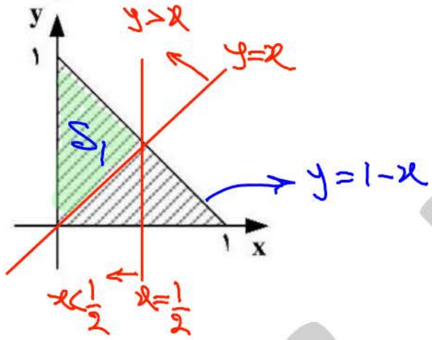
۴۵- تابع چگالی مشترک دو متغیر تصادفی X و Y روی ناحیه هاشورخورده مقدار ثابت و بقیه جاها صفر است. احتمال شرطی $P\left\{Y > X \middle| X < \frac{1}{2}\right\}$ برابر کدام است؟



۱) ۰٫۲۵
۲) ۰٫۶۶
۳) ۰٫۷۵
۴) ۰٫۳۳

تکراری، آسان
(در جزوه چندین بار این مدل سوال‌ها حل شده است)

$$P\left(Y>X \middle| X<\tfrac{1}{2}\right) = \frac{P(y>x, x<\frac{1}{2})}{P(x<\frac{1}{2})} = \frac{S_1}{P(x<\frac{1}{2})} = \frac{\frac{1}{2}}{P(x<\frac{1}{2})}$$



$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{\text{مساحت}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \quad , \quad f_X(x) = \int_Y f_{X,Y}(x,y)\,dy$$

$$f_X(x) = \int_0^{1-x} 2\,dy = 2(1-x)$$: تابع احتمال حاشیه‌ای x

$$P(x<\tfrac{1}{2}) = \int_0^{\frac{1}{2}} 2(1-x)\,dx = 2\left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{2}} = 2\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right] = \frac{3}{4}$$

$$\text{جواب} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3} = 0.66$$